UNIVERSITY OF MAINE
LIBRARIES

RAYMOND H. FOGLER LIBRARY
ORONO

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES D'INTERPOLATION

OUVRAGES PARUS DERNIEREMENT

DANS CETTE COLLECTION.

Majoration 40 %.

Leçons sur la théorie des fonctions (**Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions**), par EMILE BOREL, 3e édit., 1914..... 20 fr.

Leçons sur les fonctions entières, 2e édition; 1921..... 20 fr.

Leçons sur les séries divergentes, par EMILE BOREL, 2e édit. (*Sous presse.*)

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par ÉMILE BOREL, rédigées par *G. Julia*.. 20 fr.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, professées à la Sorbonne, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN. 20 fr.

Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de *n* variables. Fonctions de Poincaré; par GEORGES GIRAUD..... 20 fr.

Méthodes et problèmes de théorie des fonctions; par ÉMILE BOREL..... 20 fr.

Leçons d'analyse fonctionnelle, professées au Collège de France, par PAUL LÉVY, Professeur à l'École Polytechnique, avec une Préface de J. HADAMARD, Membre de l'Institut..... 35 fr.

Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, professées au Collège de France, par GASTON JULIA, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris; rédigées par *P. Flamant*, Agrégé-Préparateur à l'École Normale supérieure. 20 fr.

L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique, par S. LEFSCHETZ, 154 pages, avec figures..... 20 fr.

Leçons sur la composition et les fonctions permutables, par VITO VOLTERRA, Membre de l'Institut, professeur à l'Université de Rome, et J. PÉRÈS, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille. 20 fr.

Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, professées à la Sorbonne par SERGE BERNSTEIN, Membre de l'Académie des Sciences de l'Ukraine. In-8 (25-16) de X-200 pages... 50 fr.

Leçons sur les fonctions quasi analytiques, professées au Collège de France, par J. CARLEMAN, professeur à l'Université de Stockholm. In-8 (25-16) de 116 pages..... 30 fr.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES D'INTERPOLATION

PAR

N.-E. NÖRLUND
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE,
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE.

Rédigées par René LAGRANGE
Maître de conférences à l'Université de Lille

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation **réservés**
pour tous pays.

PRÉFACE.

Le présent Ouvrage est issu de leçons professées à l'Université de Copenhague. Pendant la rédaction du volume, j'ai eu l'heureuse fortune d'avoir comme collaborateur un géomètre de beaucoup de mérite, M. René Lagrange, actuellement maître de conférences à l'Université de Lille. J'apprécie hautement la valeur du concours de M. Lagrange, et c'est pour moi un agréable devoir de le remercier très vivement de la peine qu'il a prise et de tous les soins qu'il y a donnés.

Le sujet du livre touche à la fois à la théorie des approximations numériques et à la théorie des fonctions. Le problème de l'interpolation consiste à représenter une fonction à l'aide des valeurs qu'elle prend pour des valeurs déterminées de la variable indépendante. Ce problème comporte évidemment une infinité de solutions. Celle qui se présente tout d'abord à l'esprit a été donnée par Newton, et c'est d'ailleurs celle dont les calculateurs font presque toujours usage. Elle consiste à représenter la fonction par un polynome de degré n, qui coïncide avec la fonction en $n+1$ points $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Ainsi formulé, le problème devient entièrement déterminé, et il conduit à la formule d'interpolation de Newton que nous étudierons dans le Chapitre I. Dans la théorie des approximations numériques, la formule de Newton joue un rôle important. On en fait usage dans la construction des tables ou, encore, quand on a besoin de faire une différentiation numérique ou une quadrature. Mais puisque cette formule est très utile pour le calculateur, il y a lieu de se demander

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES D'INTERPOLATION

CHAPITRE I.

LA FORMULE D'INTERPOLATION DE NEWTON.

I. — Les différences divisées.

1. Pour former le polynome d'interpolation de Newton on commence par calculer les différences divisées (1). Admettons que les valeurs de la fonction $F(z)$ soient données aux points $z = z_0$, $z_1, z_2, \ldots$, supposés distincts. On entend par « différence divisée d'arguments z_0 et z_1 » le rapport

$$[z_0 z_1] = \frac{F(z_0) - F(z_1)}{z_0 - z_1}.$$

Deux différences divisées $[z_0 z_1]$ et $[z_1 z_2]$, ayant un argument commun, fournissent à leur tour une différence divisée du second ordre d'arguments z_0, z_1 et z_2,

$$[z_0 z_1 z_2] = \frac{[z_0 z_1] - [z_1 z_2]}{z_0 - z_2}.$$

Et ainsi de suite. On définit la différence divisée d'ordre n à l'aide de deux différences d'ordre $(n-1)$, ayant $(n-1)$ arguments communs :

$$[z_0 z_1 \ldots z_n] = \frac{[z_0 z_1 \ldots z_{n-1}] - [z_1 z_2 \ldots z_n]}{z_0 - z_n}.$$

(1) Ampère [1] appelle ces quantités les fonctions interpolaires.

C'est *la formule d'interpolation de Newton* [1, 2, 3] qu'on trouve dans le troisième livre des Principia. Les quantités $[z_0 z_1 \dots z_s]$ qui entrent dans cette formule sont les éléments qui figurent en tête de chaque colonne du tableau (A). Si l'hypothèse relative à la constance de $[z z_0 \dots z_n]$ n'est pas satisfaite, la formule n'en subsiste pas moins, car par sa formation même on voit qu'elle n'est qu'une pure identité qui ramène la détermination de la fonction $F(z)$ à la détermination du reste

$$(5) \qquad R_{n+1} = [z z_0 z_1 \dots z_n](z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_n).$$

Dans le cours de cet Ouvrage, nous allons faire une étude approfondie du reste en faisant différentes hypothèses sur les arguments $z_0, z_1, z_2, \dots$.

Remarquons d'abord que la formule (2) nous donne l'expression suivante du reste

$$R_{n+1} = \left(\frac{F(z)}{\psi_n(z)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{F(z_i)}{(z_i - z)\psi_n'(z_i)} \right) \psi_n(z)$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad F(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\psi_n(z)}{(z - z_i)\psi_n'(z_i)} F(z_i) + [z z_0 z_1 \dots z_n]\psi_n(z).$$

C'est *la formule d'interpolation de Lagrange* [3], qui n'est qu'une autre forme de la formule de Newton.

De (3) on déduit cette autre expression du reste

$$(7) \qquad R_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^n & F(z_0) \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n & F(z_1) \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n & F(z_n) \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n & F(z) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{vmatrix},$$

et en développant le déterminant du numérateur suivant les éléments de la dernière colonne on retrouve l'équation (6).

On arrive aussi à la formule de Lagrange de la manière suivante. On se propose de déterminer un polynome de degré n,

$$F_n(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n$$

qui coïncide avec la fonction $F(z)$ aux points

$$z = z_0, z_1, \ldots, z_n.$$

Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont déterminés par les $n+1$ équations

$$A_0 + A_1 z_s + A_2 z_s^2 + \ldots + A_n z_s^n = F(z_s), \qquad s = 0, 1, \ldots, n$$

qui admettent une solution et une seule. Leur résolution donnera

$$(8)\quad F_n(z) = -\begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \ldots & z_0^n & F(z_0) \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^n & F(z_1) \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \ldots\ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^n & F(z_n) \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^n & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \ldots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^n \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^n \end{vmatrix}$$

identique, comme il était à prévoir, au premier terme du second membre de l'équation (6).

II. — Expressions diverses du reste de la formule de Newton.

2. Supposons que les nombres $z_0, z_1, \ldots, z_n$ soient situés dans l'intervalle $a \leqq z \leqq b$, et que la fonction $F(z)$ soit réelle et admette des dérivées, jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre inclus, dans cet intervalle. Dans ces conditions, nous allons donner de la différence divisée d'ordre n une expression souvent utile. Par construction, le polynome d'interpolation $F_n(z)$ coïncide avec la fonction $F(z)$ aux points $z = z_0$, $z_1, \ldots, z_n$. On vérifie d'ailleurs immédiatement sur l'expression (7) du reste que la fonction

$$F(z) - F_n(z)$$

s'annule en ces $n+1$ points. En vertu du théorème de Rolle, la dérivée d'ordre n de cette fonction s'annule donc en un point ξ intermédiaire entre les points $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Mais sur la forme newtonienne du polynome d'interpolation, on voit immédiatement que

$$F_n^{(n)}(z) = n\,![z_0 z_1 \ldots z_n].$$

On aura donc

$$(9)\qquad [z_0 z_1 \ldots z_n] = \frac{F^{(n)}(\xi)}{n\,!} \qquad a < \xi < b.$$

Cette équation constitue évidemment une extension de la formule des accroissements finis

$$\frac{F(z_1)-F(z_0)}{z_1-z_0}=F'(\xi) \qquad z_0<\xi<z_1,$$

qui s'en déduit lorsqu'on pose $n=1$. Si la variable z reste dans l'intervalle $a\leqq z\leqq b$ et si la fonction $F(z)$ admet des dérivées jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre dans cet intervalle, l'expression (5) du reste peut donc s'écrire

$$(10)\qquad R_{n+1}=\frac{(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_n)}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi) \qquad a<\xi<b.$$

Cette équation a été démontrée par Cauchy [2], et plus tard par Genocchi [1, 2, 3], Stieltjes [1], Schwarz [1] et Peano [2].

3. La formule de Lagrange se distingue par sa remarquable symétrie et son élégance, mais la formule de Newton présente l'avantage de rester applicable lorsque plusieurs des quantités z_0, z_1, ..., z_n tendent vers une même limite. En effet, lorsque $z_1\ldots z_n$ tendent vers la limite z_0, l'équation (9) montre que

$$(11)\qquad \lim[z_0z_1z_2\ldots z_n]=[z_0z_0z_0\ldots z_0]=\frac{F^{(n)}(z_0)}{n!},$$

pourvu que la dérivée $F^{(n)}(z)$ soit continue (1) au point z_0. La formule de Newton se réduit donc à la formule de Taylor,

$$F(z)=\sum_{s=0}^{n}\frac{(z-z_0)^s}{s!}F^{(s)}(z_0)+(z-z_0)^{n+1}[zz_0z_0\ldots z_0],$$

avec l'expression exacte du terme complémentaire. Et l'équation (10) nous donne l'expression de Lagrange du reste

$$R_{n+1}=\frac{(z-z_0)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi),$$

ξ étant situé entre z_0 et z. On vérifie aussi immédiatement sur

(1) Si $z_0<z_1<z_2<\ldots<z_n$, on n'a pas besoin de supposer la continuité de $F^{(n)}(z)$. La formule (11) subsiste dans tous les cas où la fonction $F^{(n-1)}(z)$ a, pour la valeur particulière $z=z_0$, une dérivée finie $F^{(n)}(z_0)$. *Cf.* Stieltjes [2] et Fréchet [1].

l'expression (3) que $[z_0 z_1 \dots z_n]$ tend vers une limite si, par exemple, z_0 tend vers z_1, les autres arguments restant fixes. Il suffit de soustraire des éléments de la première ligne les éléments de la seconde et de diviser les deux déterminants par $z_0 - z_1$. Quand z_0 tend vers z_1, il vient

$$[z_1 z_1 z_2 \dots z_n] = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \dots & (n-1)z_1^{n-2} & F'(z_1) \\ 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} & F(z_1) \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & z_n^3 & \dots & z_n^{n-1} & F(z_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2z_1 & \dots & nz_1^{n-1} \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{vmatrix}}.$$

On peut évidemment répéter cette opération un nombre quelconque de fois.

Lorsque dans le tableau (A) les α_0 premiers arguments seront égaux à z_0, les α_1 arguments suivants égaux à z_1, ... et les α_p derniers arguments égaux à z_p, on supposera données les quantités suivantes :

$$\begin{array}{llll} F(z_0), & F'(z_0), & \dots, & F^{(\alpha_0-1)}(z_0), \\ F(z_1), & F'(z_1), & \dots, & F^{(\alpha_1-1)}(z_1), \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, & \\ F(z_p), & F'(z_p), & \dots, & F^{(\alpha_p-1)}(z_p). \end{array}$$

A l'aide de ces quantités on saura former le tableau des différences divisées sans rencontrer d'expressions indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$. Par exemple, pour $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 2$, on trouvera ainsi le tableau suivant :

$$\begin{array}{llllll} z_0 & F(z_0) & & & & \\ & & F'(z_0) & & & \\ z_0 & F(z_0) & & \frac{1}{2}F''(z_0) & & \\ & & F'(z_0) & & [z_0 z_0 z_0 z_1] & \\ z_0 & F(z_0) & & [z_0 z_0 z_1] & & [z_0 z_0 z_0 z_1 z_1] \\ & & [z_0 z_1] & & [z_0 z_0 z_1 z_1] & \\ z_1 & F(z_1) & & [z_0 z_1 z_1] & & \\ & & F'(z_1) & & & \\ z_1 & F(z_1) & & & & \end{array}$$

où les éléments qui figurent en tête de chaque colonne sont les

coefficients du polynome d'interpolation de Newton $F_n(z)$. Ce polynome de degré n satisfait aux conditions suivantes :

$$(12)\qquad \begin{cases} F_n^{(i)}(z_0) = F^{(i)}(z_0) & i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_0 - 1, \\ F_n^{(i)}(z_1) = F^{(i)}(z_1) & i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_1 - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n^{(i)}(z_p) = F^{(i)}(z_p) & i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_p - 1, \end{cases}$$

où

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n + 1,$$

et l'on aura, d'après la formule de Newton,

$$(13)\quad F_n(z) = \sum_{s=0}^{\alpha_0 - 1} \frac{(z - z_0)^s}{s!} F^{(s)}(z_0) + (z - z_0)^{\alpha_0} \sum_{s=0}^{\alpha_1 - 1} (z - z_1)^s [z_0 z_0 \ldots z_0 z_1 \ldots z_1] + \ldots + (z - z_0)^{\alpha_0} (z - z_1)^{\alpha_1} \ldots (z - z_p)^{\alpha_p - 1} [z_0 z_0 \ldots z_p z_p],$$

où, dans la dernière différence divisée $[z_0 z_0 \ldots z_p z_p]$, les arguments $z_0, z_1, \ldots, z_p$ figurent respectivement $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ fois. La formule de Newton nous donne ainsi le polynome du degré le moins élevé, qui coïncide, ainsi que ses dérivées de certains ordres, avec une fonction donnée, en un nombre fini de points. Par une légère modification du raisonnement du paragraphe 2, on démontre que

$$(14)\quad F(z) = F_n(z) + \frac{(z - z_0)^{\alpha_0} (z - z_1)^{\alpha_1} \ldots (z - z_p)^{\alpha_p}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\xi).$$

4. Passons au cas où les variables sont complexes. La démonstration de l'équation (10) que nous avons donnée au paragraphe 2, est en défaut parce qu'elle repose sur le théorème de Rolle qui ne subsiste plus. Par un autre procédé, on sait pourtant étendre l'équation (10) au cas actuel. Soient $z_0, z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes distincts quelconques, et soit $F(z)$ une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur et sur le contour du plus petit polygone convexe entourant les points $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Dans ces conditions, on aura

$$[z_0 z_1] = \int_0^1 F'[(1 - t_1) z_0 + t_1 z_1]\, dt_1,$$

$$[z_0 z_1 z_2] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} F''[(1 - t_1) z_0 + (t_1 - t_2) z_1 + t_2 z_2]\, dt_2,$$

et, en posant

$$u_n = (1 - t_1) z_0 + (t_1 - t_2) z_1 + \ldots + (t_{n-1} - t_n) z_{n-1} + t_n z_n,$$

on démontre, par voie d'induction, que

$$(15) \qquad [z_0 z_1 \ldots z_n] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} \mathrm{F}^{(n)}(u_n)\, dt_n.$$

Cette formule est due à Hermite [2] et, comme l'a fait remarquer Genocchi [2], elle peut encore se mettre sous la forme symétrique

$$[z_0 z_1 \ldots z_n] = \int \ldots \int \mathrm{F}^{(n)}(t_0 z_0 + t_1 z_1 + \ldots + t_n z_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n,$$

où l'intégration est étendue à toutes les valeurs positives des t_i qui satisfont à la relation

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1.$$

En appliquant le théorème de la moyenne de Darboux à l'intégrale (15), on trouvera

$$[z_0 z_1 \ldots z_n] = \lambda\, \mathrm{F}^{(n)}(\theta_0 z_0 + \theta_1 z_1 + \ldots + \theta_n z_n) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n$$
$$= \frac{\lambda}{n!}\, \mathrm{F}^{(n)}(\theta_0 z_0 + \theta_1 z_1 + \ldots + \theta_n z_n),$$

où λ est un nombre complexe dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 1 et où les θ_i désignent des nombres positifs qui satisfont à la relation

$$\theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_n = 1.$$

Le point $\theta_0 z_0 + \theta_1 z_1 + \ldots + \theta_n z_n$ est, par conséquent, situé dans le polygone convexe où l'on a supposé la fonction $\mathrm{F}(z)$ holomorphe. En appliquant ce résultat à l'expression (5) du reste de la formule de Newton, et en admettant que la variable z soit située dans le polygone susdit, on trouvera

$$(16) \quad \mathrm{R}_{n+1} = \frac{(z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_n)}{(n+1)!}\, \lambda\, \mathrm{F}^{(n+1)}(\theta_0 z_0 + \ldots + \theta_n z_n + \theta_{n+1} z),$$

où

$$\theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_{n+1} = 1.$$

On doit cette formule à Jensen [4].

Elle présente l'inconvénient que nous avons dû supposer les nombres $z_0, z_1, \ldots, z_n$ différents l'un de l'autre. Dans le paragraphe suivant, on verra qu'on peut aisément y remédier.

5. L'intégrale de Cauchy permet de donner une nouvelle expression du reste, souvent préférable à celle que nous venons d'étudier. Admettons que la fonction $F(z)$ soit holomorphe à l'intérieur et sur le contour C d'un domaine simplement connexe et que les points $z, z_0, z_1, \ldots, z_n$ soient situés à l'intérieur de ce domaine. On sait que l'on a

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{17}$$

De la définition des différences divisées, on déduit immédiatement

$$[z_0 z_1] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)}$$

et par voie d'induction on démontre que

$$[z_0 z_1 \ldots z_n] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_n)}. \tag{18}$$

Cela posé, reprenons la fonction (1). On aura

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\psi_0(\zeta)} + \frac{\psi_0(z)}{\psi_0(\zeta)}\frac{1}{\zeta - z}.$$

Remplaçons z_0 successivement par $z_1, z_2, \ldots, z_n$. En combinant les $(n+1)$ équations ainsi obtenues, on trouvera l'identité suivante :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\psi_0(\zeta)} + \frac{\psi_0(z)}{\psi_1(\zeta)} + \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(\zeta)} + \ldots + \frac{\psi_{n-1}(z)}{\psi_n(\zeta)} + \frac{\psi_n(z)}{\psi_n(\zeta)}\frac{1}{\zeta - z}. \tag{19}$$

En substituant cette expression de $\frac{1}{\zeta - z}$ dans l'intégrale (17), on retrouve la formule de Newton,

$$F(z) = F(z_0) + \sum_{s=1}^{n} [z_0 z_1 \ldots z_s]\,\psi_{s-1}(z) + R_{n+1}, \tag{20}$$

avec l'expression suivante du reste,

$$(21) \qquad R_{n+1} = \frac{\psi_n(z)}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{\psi_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Cette relation est tout à fait générale. Les $z_0, z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres quelconques, et nous n'avons plus besoin de les supposer différents l'un de l'autre.

On voit immédiatement sur l'expression (18) que la différence divisée $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ tend vers une limite si certains des points z_0, z_1, ..., z_n viennent se confondre, et la différence divisée $[z_0 z_0 \ldots z_p z_p]$, où les arguments $z_0, z_1, \ldots, z_p$ figurent respectivement $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ fois, admet alors l'expression suivante :

$$(22) \qquad [z_0 z_0 \ldots z_p z_p] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{\alpha_0} (\zeta - z_1)^{\alpha_1} \ldots (\zeta - z_p)^{\alpha_p}}.$$

En rapprochant cette équation de l'équation (18), on voit que la différence divisée $[z_0 z_0 \ldots z_p z_p]$ d'ordre n s'exprime comme une dérivée d'ordre $n - p$ de la différence divisée $[z_0 z_1 z_2 \ldots z_p]$ d'ordre p. En dérivant $\alpha_0 - 1$ fois par rapport à z_0, $\alpha_1 - 1$ fois par rapport à z_1 et $\alpha_p - 1$ fois par rapport à z_p, on trouvera

$$\frac{d^{\alpha_p - 1}}{dz_p^{\alpha_p - 1}} \cdots \frac{d^{\alpha_0 - 1}}{dz_0^{\alpha_0 - 1}} [z_0 z_1 \ldots z_p] = \Gamma(\alpha_0)\, \Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p)\, [z_0 z_0 \ldots z_p z_p].$$

De l'équation (15) d'Hermite, on déduit donc la relation suivante :

$$[z_0 z_0 \ldots z_p z_p] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{p-1}} \varphi\, F^{(n)}(u_p)\, dt_p,$$

où l'on a posé

$$\varphi = \frac{(1 - t_1)^{\alpha_0 - 1} (t_1 - t_2)^{\alpha_1 - 1} \ldots (t_{p-1} - t_p)^{\alpha_{p-1} - 1} t_p^{\alpha_p - 1}}{\Gamma(\alpha_0)\, \Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_{p-1})\, \Gamma(\alpha_p)}.$$

Le théorème de la moyenne appliqué, comme dans le paragraphe 4, à la dernière intégrale, donne alors

$$[z_0 z_0 \ldots z_p z_p] = \lambda F^{(n)}(\theta_0 z_0 + \ldots + \theta_p z_p) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{p-1}} \varphi\, dt_p,$$

où

$$\theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_p = 1.$$

Mais en vertu d'une formule de Lejeune-Dirichlet, l'intégrale du

second membre est égale à $\frac{1}{n!}$. En reprenant le raisonnement du paragraphe 4, on vérifie donc que l'expression (16) du terme complémentaire reste vraie si un certain nombre des points $z_0, z_1, \ldots, z_n$ viennent se confondre.

6. Quand on veut construire la table d'une fonction, on s'arrange le plus souvent pour que les arguments $z_0, z_1, z_2, \ldots$ de cette table forment une progression arithmétique, et c'est ce cas que nous allons maintenant considérer. Sans diminuer la généralité, on peut se borner à donner aux z_i des valeurs entières. Posons pour abréger

$$\nabla F(z) = \frac{F(z+1) + F(z)}{2}$$

et désignons la différence de la fonction $F(z)$ par

$$\Delta F(z) = F(z+1) - F(z).$$

En appliquant l'opération Δ n fois de suite, on obtient la différence d'ordre n, qui se définit par l'équation de récurrence

$$\overset{n}{\Delta} F(z) = \Delta\left[\overset{n-1}{\Delta} F(z)\right]$$

et dont on peut donner l'expression directe

$$\overset{n}{\Delta} F(z) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} F(z+s).$$

Les différences divisées sont liées aux différences ordinaires par l'équation suivante :

$$[z, z+1, z+2, \ldots, z+n] = \frac{1}{n!} \overset{n}{\Delta} F(z).$$

En posant $z_s = a + s$ dans l'équation (20), on trouvera

$$F(z) = \sum_{s=0}^{n} \binom{z-a}{s} \overset{s}{\Delta} F(a) + R_{n+1}, \tag{23}$$

où

$$R_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z-a)(z-a-1)\ldots(z-a-n)}{(\zeta-a)(\zeta-a-1)\ldots(\zeta-a-n)} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{24}$$

C'est cette série particulière que l'on désigne souvent comme *la série de Newton*. En choisissant les nombres z_s comme il suit :

$$z_0 = 0, \qquad z_{2s-1} = -s, \qquad z_{2s} = s,$$

on trouvera

$$(25)\quad F(z)=\sum_{s=0}^{n}\binom{z+s}{2s}\overset{2s}{\triangle}F(-s)+\sum_{s=0}^{n-1}\binom{z+s}{2s+1}\overset{2s+1}{\triangle}F(-s-1)+R_{2n+1},$$

où

$$(26)\quad R_{2n+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\dots(\zeta^2-n^2)}\,\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Si l'on pose, au contraire, $z_{2s-1}=s$ et $z_{2s}=-s$, il vient

$$(27)\quad F(z)=\sum_{s=0}^{n}\binom{z+s-1}{2s}\overset{2s}{\triangle}F(-s)+\sum_{s=0}^{n-1}\binom{z+s}{2s+1}\overset{2s+1}{\triangle}F(-s)+R_{2n+1}.$$

On désignera les séries (25) et (27) comme *les séries d'interpolation de Gauss* (¹). Ajoutées terme à terme, elles donnent *la série d'interpolation de Stirling* (¹) [2]

$$(28)\quad F(z)=\sum_{s=0}^{n}\frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!}\overset{2s}{\triangle}F(-s)$$
$$+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-s^2)}{(2s+1)!}\nabla\overset{2s+1}{\triangle}F(-s-1)+R_{2n+1}.$$

On obtient un autre développement remarquable de la manière suivante. Remplaçons, dans l'équation (27), z par $z+\frac{1}{2}$ et $F(z)$ par $F\left(z-\frac{1}{2}\right)$. Remplaçons, dans l'équation (25), z par $z-\frac{1}{2}$ et $F(z)$ par $F\left(z+\frac{1}{2}\right)$. En ajoutant terme à terme les deux séries ainsi obtenues, on forme *la série d'interpolation de Bessel* (¹) :

$$(29)\quad F(z)=\sum_{s=0}^{n}\frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\dots\left[z^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s)!}\nabla\overset{2s}{\triangle}F\left(-s-\frac{1}{2}\right)$$
$$+z\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\dots\left[z^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s+1)!}\overset{2s+1}{\triangle}F\left(-s-\frac{1}{2}\right)+R_{2n+1}.$$

(¹) Ces dénominations ne s'accordent pas très bien avec les faits historiques, mais nous les conserverons toutefois parce qu'elles ont été consacrées par l'usage et figurent souvent dans les Traités élémentaires sur l'interpolation.

Les séries de Stirling, Gauss et Bessel sont assez voisines l'une de l'autre pour qu'il suffise d'étudier la série de Stirling et pour que nous puissions nous borner à quelques courtes remarques relativement aux séries de Gauss et de Bessel. D'ailleurs, les fonctions que permettent de représenter ces séries sont assez particulières, tandis que les séries de Newton et les séries de facultés que nous étudierons ensuite correspondent à une classe beaucoup plus étendue de fonctions. Cependant il y a intérêt à rapprocher la série de Stirling (28) de la série de Newton (23). Le calculateur se sert de la série de Newton quand il s'agit d'interpoler au voisinage d'une des deux extrémités de la table ; mais en tout autre cas, il préfère la série de Stirling parce qu'elle est « plus convergente », c'est-à-dire que les n premiers termes de la série de Stirling donnent une meilleure approximation que les n premiers termes de la série de Newton.

En faisant tendre n vers l'infini, on pourrait donc être tenté de croire que la convergence de la série de Newton devrait entraîner la convergence de la série de Stirling. Mais il n'en est rien. Nous allons voir que la série (23) converge dans des cas beaucoup plus étendus que ne le fait la série d'interpolation de Stirling. On voit par là une nouvelle fois combien est grande la différence entre ce que demandent le géomètre et le calculateur aux séries dont ils s'occupent. Si une série converge, le géomètre en peut tirer parti sans se préoccuper de la rapidité de la convergence. Mais s'il s'agit d'une approximation numérique, l'essentiel est le degré d'approximation que donnent *les premiers termes* de la série, et une série de Stirling qui diverge peut quelquefois rendre de plus grands services qu'une série de Newton qui converge.

Signalons encore que ce n'est pas seulement dans le calcul aux différences finies et dans la théorie des approximations numériques que les séries d'interpolation jouent un rôle considérable. C'est ainsi qu'une application remarquable à la théorie des nombres a été donnée récemment par G. Pólya [1, 2] et F. Carlson [2], qui en font usage pour étudier les fonctions entières qui prennent des valeurs entières pour les valeurs entières de z.

CHAPITRE II.

LA SÉRIE D'INTERPOLATION DE STIRLING.

I. — Convergence uniforme.

7. Nous allons étudier dans ce Chapitre la série d'interpolation de Stirling, définie au Chapitre précédent par la formule (28), et que l'on peut encore écrire

$$(1) \qquad F(z) = F(0) + \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + a'_s z)\, z(z^2 - 1^2)\dots(z^2 - s^2).$$

Nous avons vu que l'on peut exprimer aisément les coefficients a_s et a'_s à l'aide des valeurs de la fonction $F(z)$ aux points $z = 0$, ± 1, ± 2, ...; d'ailleurs, en donnant successivement à z toutes les valeurs entières, on obtient un système d'équations linéaires qui détermine complètement ces coefficients; donc, si le développement en série de Stirling, d'une fonction donnée $F(z)$, est possible, il est nécessairement unique. Cette remarque est essentielle, et nous verrons d'ailleurs qu'il n'en est plus de même pour la série de Newton.

Les deux combinaisons

$$(2) \qquad F(z) - F(-z) = 2\sum_{s=0}^{\infty} a_s z(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2)\dots(z^2 - s^2),$$

$$(3) \qquad F(z) + F(-z) = 2F(0) + 2\sum_{s=0}^{\infty} a'_s z^2(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2)\dots(z^2 - s^2)$$

nous montrent qu'il suffit d'étudier une série de la forme (2), ou encore, en posant

$$(4) \qquad H(z) = \frac{F(z) - F(-z)}{2z},$$

$$(5) \qquad H(z) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2)\dots(z^2 - s^2).$$

Si z est un entier positif ou négatif, cette série se réduit à un polynome. En écartant ce cas, sans intérêt pour l'étude de la convergence, nous allons démontrer le théorème suivant :

Si la série (5) *converge pour* $z = z_0$ (z_0 *n'étant pas entier*), *elle converge uniformément dans tout domaine fini du plan de la variable* z.

En effet, posons

$$b_s = a_s(z_0^2 - 1^2)\dots(z_0^2 - s^2), \qquad b_0 = a_0;$$
$$c_s = \frac{(z^2 - 1^2)\dots(z^2 - s^2)}{(z_0^2 - 1^2)\dots(z_0^2 - s^2)}, \qquad c_0 = 1;$$

par hypothèse, la série $\sum_{s=0}^{\infty} b_s$ converge, et il nous faut démontrer qu'il en est de même de $\sum_{s=0}^{\infty} b_s c_s$. Appliquons la transformation d'Abel au reste de cette dernière série :

$$(6) \qquad \sum_{s=p}^{s=m} b_s c_s = c_p \sum_{s=p}^{\infty} b_s + \sum_{s=p+1}^{s=m} (c_s - c_{s-1}) \sum_{\nu=s}^{\infty} b_\nu - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} b_\nu;$$

on a

$$c_s - c_{s-1} = c_{s-1} \frac{z^2 - z_0^2}{z_0^2 - s^2},$$

et, lorsque s augmente indéfiniment,

$$c_s = \frac{\left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right)}{\left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z_0^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)}$$

tend uniformément vers la limite $\frac{z_0 \sin \pi z}{z \sin \pi z_0}$.

Donc, dans l'équation (6), on peut faire tendre m vers l'infini, ce qui donne

$$(7) \qquad \sum_{s=p}^{\infty} b_s c_s = c_p \sum_{s=p}^{\infty} b_s - (z^2 - z_0^2) \sum_{s=p+1}^{\infty} \frac{c_{s-1}}{s^2 - z_0^2} \sum_{\nu=s}^{\infty} b_\nu.$$

Enfin, ε étant un nombre positif, il existe un nombre p_0 tel que

$$\left| \sum_{s=p}^{\infty} b_s \right| < \varepsilon$$

si $p \geqq p_0$, et le théorème énoncé résulte immédiatement de l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{s=p}^{\infty} b_s c_s \right| < \varepsilon C + \varepsilon C \sum_{s=p+1}^{\infty} \frac{1}{|s^2 - z_0^2|} < \varepsilon C,$$

cette inégalité se comprenant avec la convention suivante, que nous faisons ici une fois pour toutes : la lettre C signifie seulement qu'on peut la remplacer par une certaine constante, sans que ce soit nécessairement la même dans les différents termes où elle apparaît.

La série (1) étant la somme de deux séries de la forme (2) et (3), deux cas seulement peuvent se présenter : ou bien elle converge uniformément dans tout domaine fini du plan ; ou bien elle ne converge que pour les valeurs entières de z ; cependant, il peut arriver qu'elle converge en outre pour une seule valeur non entière. Lorsque cette série converge, elle représente donc toujours une fonction entière de z.

II. — Fonction majorante.

8. Pour voir quelles sont les fonctions entières représentables par une série de la forme (1), nous allons chercher une limite supérieure du module de $F(z)$. Il est remarquable, en effet, que l'étude de cette limite supérieure permet une délimitation assez précise de la classe des fonctions qui admettent un pareil développement. On y arrive le plus aisément en étudiant séparément les sommes

$$F(z) - F(-z) \quad \text{et} \quad F(z) + F(-z),$$

ce qui conduit à déterminer une fonction majorante relative à $H(z)$, en supposant que la série (5) converge.

Cette série peut être simplement convergente, pour toute valeur non entière de z ; mais en reprenant l'équation (7), avec $p = 0$, on

obtient la série

$$H(z) = H(z_0) + (z^2 - z_0^2) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(z^2-1^2)\dots(z^2-(s-1)^2)}{(z_0^2-1^2)\dots(z_0^2-s^2)} \sum_{\nu=s}^{\infty} b_\nu,$$

absolument convergente quel que soit z. En particulier, faisons $z_0 = 0$; il vient

$$H(z) = H(0) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha_s}{(s+1)^2} \frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-s^2)}{(s!)^2},$$

où

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_s = 0;$$

en changeant légèrement nos notations et posant

$$c_n = \frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{(n!)^2}, \tag{8}$$

notre série s'écrit donc

$$H(z) = H(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}. \tag{9}$$

Les nombres α_n sont indépendants de z, et les c_n sont des polynomes en z tels que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \frac{|z \sin \pi z|}{\pi}. \tag{10}$$

9. L'étude de $H(z)$ va résulter de l'examen de l'ordre de grandeur de c_n. Pour cela, formons

$$\xi(n) = \left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| = \left|1 - \frac{z^2}{n^2}\right|,$$

qui s'écrit encore, en posant

$$z = r e^{i\varphi},$$

$$\xi(n) = \sqrt{1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{2r^2}{n^2}\cos 2\varphi}. \tag{11}$$

$H(z)$ étant paire, on peut se borner aux valeurs de z situées dans l'angle $-\frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$. Considérons alors $\xi(n)$ comme une fonction de la variable continue n, et dérivons-la; il vient

$$\xi(n)\,\xi'(n) = -\frac{2r^2}{n^5}(r^2 - n^2\cos 2\varphi),$$

et l'on voit que $\xi'(n)$ ne s'annule que si $\cos 2\varphi > 0$. Il en résulte que $H(z)$ se comportera différemment dans les angles

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}.$$

1° Si $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, $\xi'(n)$ est constamment négatif, et $\xi(n) > 1$; donc

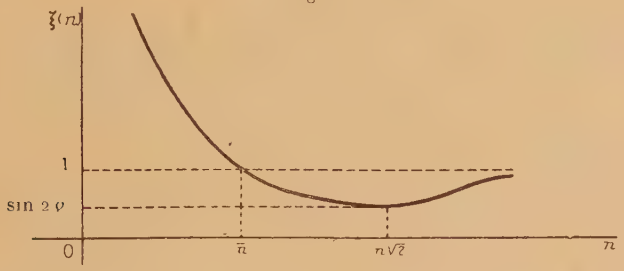
$$|c_{n+1}| < |c_n| < |c_{n-1}| = \frac{1}{\pi}|z \sin \pi z|$$

et, par suite,

$$(12) \qquad \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \frac{1}{\pi} r\, e^{\pi r \sin \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{(n+1)^2} = C r\, e^{\pi r \sin \varphi}.$$

2° $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$. $\xi(n)$ suit alors la courbe de variation suivante :

Fig. 1.



et la valeur unique de n pour laquelle $\xi(n) = 1$ est

$$\bar{n} = \frac{r}{\sqrt{2 \cos 2\varphi}}.$$

Si l'on revient aux valeurs entières de n, les coefficients $|c_n|$ admettent donc une valeur maximum dans l'intervalle

$$\bar{n} - 1 \leq n \leq \bar{n},$$

et les termes qui auront le plus d'influence sur l'ordre de grandeur de la fonction seront ceux dont l'indice se trouve dans un certain voisinage de $\bar{n}$. Cette valeur maximum admet une expression particulièrement simple, que nous allons déterminer.

Mettons c_n sous la forme

$$c_n = z\,\frac{\Gamma(z+n+1)}{\Gamma^2(n+1)\,\Gamma(z-n)};$$

si l'on se rappelle l'expression asymptotique de $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}[1+\varepsilon(z)], \tag{13}$$

où $\varepsilon(z)$ tend vers zéro quand z s'éloigne indéfiniment de l'axe des nombres négatifs, on vérifie facilement qu'il existe une constante C telle que l'on ait

$$|c_n| < Cr\left|\left(\frac{z^2-n^2}{n^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{z+n}{z-n}\right)^{z}\right|;$$

pour $n=\bar{n}$, on aura

$$\left|\frac{z^2-\bar{n}^2}{\bar{n}^2}\right| = 1,$$

$$\frac{z-\bar{n}}{z+\bar{n}} = \frac{e^{i\varphi}-\dfrac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}}{e^{i\varphi}+\dfrac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}} = \left(\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}+i\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}+\sqrt{2}\cos\varphi}\right)^2$$

et, par suite,

$$\left|\left(\frac{z+\bar{n}}{z-\bar{n}}\right)^{z}\right| = e^{r\psi(\varphi)},$$

où l'on a posé

$$\psi(\varphi) = \cos\varphi\log\left(\sqrt{\cos 2\varphi}+\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2 + 2\sin\varphi\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right). \tag{14}$$

Par conséquent,

$$|c_{\bar{n}}| < Cr\,e^{r\psi(\varphi)}. \tag{15}$$

D'autre part, la valeur entière de n qui nous intéresse est comprise dans l'intervalle $(\bar{n}-1,\ \bar{n})$ et vérifie

$$|c_n| < C\,|c_{\bar{n}}|,$$

car

$$\lim_{\bar{n}\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{\bar{n}}}\right| = 1, \quad \text{si} \quad |n-\bar{n}| \leq 1.$$

Enfin, tous les autres coefficients c_n vérifient *a fortiori* la même

inégalité, de sorte que, dans l'angle $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$, on a

$$(16) \qquad \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < C\,|c_{\overline{n}}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{(n+1)^2} < C\,|c_{\overline{n}}| < C\,r\,e^{r\psi(\varphi)}.$$

10. Pour réunir en une seule les deux inégalités (12) et (16), nous désignerons par $\psi(\varphi)$ la fonction, de période π, définie par l'expression (14) dans l'angle $-\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, et coïncidant avec $\pi \sin\varphi$ dans l'angle $\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4}$. Cette fonction est ainsi définie pour toutes les valeurs de φ; elle est paire et continue, car les deux expressions donnent

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Enfin, il nous suffit d'étudier sa variation dans l'angle $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, puisqu'elle est évidemment positive et croissante dans l'intervalle

$$\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Mais alors on peut écrire

$$\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) = \sqrt{2}\int_0^{\varphi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}},$$

$$\log\left(\sqrt{\cos 2\varphi} + \sqrt{2}\cos\varphi\right) = \sqrt{2}\int_0^{\varphi} -\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}} + \log\left(1+\sqrt{2}\right),$$

et mettre (14) sous la forme

$$(17) \qquad \psi(\varphi) = 2\cos\varphi\log\left(1+\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2}\int_0^{\varphi} \frac{\sin(\varphi - x)}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx.$$

Deux dérivations successives donnent

$$(18) \qquad \psi'(\varphi) = -2\sin\varphi\log\left(1+\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2}\int_0^{\varphi} \frac{\cos(\varphi - x)}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx,$$

$$(19) \qquad \psi''(\varphi) = -\psi(\varphi) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

de sorte que l'inégalité déduite de (17)

$$\psi(\varphi) \leq 2\cos\varphi \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \int_0^{\varphi} \sin(\varphi - x)\, dx$$

$$= 2\cos\varphi \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}} (1 - \cos\varphi)$$

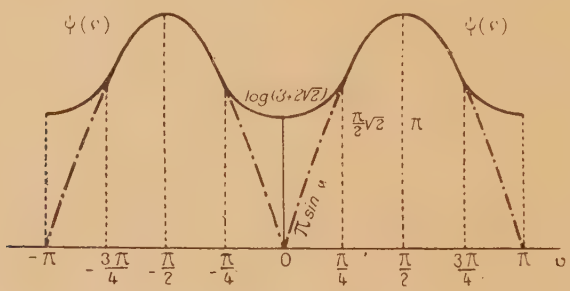
entraîne

$$\psi''(\varphi) \geq 2\cos\varphi \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - \log(1+\sqrt{2}) \right];$$

$\psi''(\varphi)$ est donc positive dans l'intervalle $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, et, puisque $\psi'(0) = 0$, la dérivée $\psi'(\varphi)$ est positive et croissante dans cet intervalle, et il en est de même de $\psi(\varphi)$.

En complétant ces résultats grâce à la parité et à la périodicité, on obtient enfin la courbe de variation suivante :

Fig. 2.



La fonction $\psi(\varphi)$ admet des minima, égaux à $\log(3+2\sqrt{2})$ aux points 0 et $\pm\pi$, et des maxima, égaux à π, pour $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, et elle n'en admet pas d'autres. On a donc, quel que soit φ,

$$0 < \log(3+2\sqrt{2}) \leq \psi(\varphi) \leq \pi.$$

En outre, par un calcul analogue au précédent, on peut donner à (14) une autre forme :

$$\pi \sin\varphi + 2\sqrt{2} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\varphi)\, dx}{\sqrt{\cos 2x}},$$

d'où résulte, dans l'angle $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$, l'inégalité

$$\psi(\varphi) > \pi \sin\varphi.$$

11. Cela posé, nous avons démontré que la fonction $H(z)$ satisfait, pour toute valeur suffisamment grande de z, et quel que soit φ, à une inégalité de la forme

$$|H(re^{i\varphi})| < C e^{r\psi(\varphi)} r^{\beta},$$

où $\beta = 1$. Mais une étude plus précise va nous permettre de choisir, pour cet exposant, des valeurs plus faibles, à savoir :

1° $\beta = -1$ (mais non $\beta < -1$), si

$$\frac{\pi}{4} + \varepsilon < \varphi < \frac{3\pi}{4} - \varepsilon;$$

2° $\beta = -\frac{1}{2}$ $\left(\text{mais non } \beta < -\frac{1}{2}\right)$, si

$$-\frac{\pi}{4} + \varepsilon < \varphi < \frac{\pi}{4} - \varepsilon;$$

3° Enfin, fait remarquable, c'est pour $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$, ou $\varphi = \pm\frac{3\pi}{4}$, que β prend sa plus grande valeur

$$\beta = -\frac{1}{3}.$$

12. Considérons d'abord l'angle $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$. Si $n < m$, on a

$$|c_n| = \frac{|c_m|}{\xi(n+1)\xi(n+2)\ldots\xi(m)},$$

et, lorsque m augmente indéfiniment,

$$|c_n| = \frac{|z \sin \pi z|}{\pi \xi(n+1)\xi(n+2)\ldots}. \tag{20}$$

Pour déterminer une limite supérieure de $|c_n|$, remarquons que

$$\xi^2(n) = 1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{2r^2}{n^2}\cos 2\varphi > 1 - \frac{2r^2}{n^2}\cos 2\varphi;$$

$\cos 2\varphi$ étant négatif, il résulte de l'inégalité bien connue

$$\log(1+u) > \frac{u}{1+u} \qquad (u > 0)$$

que

$$\log \xi(n) > \frac{-r^2 \cos 2\varphi}{n^2 - 2r^2 \cos 2\varphi},$$

d'où l'on déduit, pour $n > r$,

$$\log \xi(n) > \frac{-r^2 \cos 2\nu}{n^2 - 2n^2 \cos 2\nu} > \frac{-r^2 \cos 2\nu}{3n^2}.$$

Par conséquent,

$$\log[\xi(n+1)\xi(n+2)\ldots] > \frac{-r^2 \cos 2\nu}{3}\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right]$$
$$> \frac{-r^2 \cos 2\nu}{3(n+1)},$$

et l'équation (20) fournit l'inégalité

$$|c_n| < C r e^{r\pi \sin \nu} e^{\frac{r^2 \cos 2\nu}{3n}} \quad (n > r). \tag{21}$$

On aura donc

$$|c_n| < \frac{C}{r} e^{r\psi(\nu)} \tag{22}$$

pour $n \leqq \frac{-r^2 \cos 2\nu}{6 \log r}$. Soit alors n_1 la partie entière de cette dernière quantité; d'autre part, si ε est un nombre positif, on peut trouver un nombre n_0 tel que

$$|\alpha_n| \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n \geqq n_0,$$

et n_1 est supérieur à n_0 lorsque r est suffisamment grand.

Cela posé, partageons la série (9) en trois :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} = \sum_{0}^{n_0-1} + \sum_{n_0}^{n_1-1} + \sum_{n_1}^{\infty}.$$

La première partie est un polynome en z, et, quelque petit que soit le nombre positif η, vérifie une inégalité

$$\left| \sum_{0}^{n_0-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < C e^{\eta r}. \tag{23}$$

Pour les deux autres sommes, on a

$$\left| \sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \varepsilon |c_{n_1}| \sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{\varepsilon C e^{r\psi(\nu)}}{r}, \tag{24}$$

$$\left| \sum_{n_1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \varepsilon C r e^{r\psi(\nu)} \sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} e^{\frac{r^2 \cos 2\nu}{3n}};$$

mais cette dernière somme est inférieure à l'intégrale

$$\int_{n_1}^{\infty} e^{\frac{r^2\cos 2\nu}{3x}} \frac{dx}{x^2} < \int_0^{\infty} e^{\frac{z}{3} r^3 \cos 2\nu}\, dz = \frac{3}{-r^2\cos 2\nu}$$

et, par suite,

$$\left| \sum_{n_1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \frac{3\varepsilon C e^{r\psi(\nu)}}{-r\cos 2\nu}. \tag{25}$$

Jusqu'ici, nous avons exclu les extrémités de l'intervalle $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. En modifiant légèrement ce raisonnement, nous allons trouver une inégalité valable dans tout cet intervalle, extrémités comprises.

On a, en effet,

$$\xi^2(n) \geq 1 + \frac{r^4}{n^4},$$

donc

$$\log \xi(n) > \frac{\frac{1}{2} r^4}{n^4 + r^4}.$$

Mais alors, si $n > r$,

$$\log \xi(n) > \frac{r^4}{4n^4}$$

et, par suite,

$$\log[\xi(n+1)\,\xi(n+2)\ldots] > \frac{r^4}{4}\left[\frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+2)^4} + \ldots\right] > \frac{r^4}{12(n+1)^3}.$$

On peut donc trouver une constante C telle que l'on ait

$$|c_n| < C r\, e^{r\psi(\nu) - \frac{r^4}{12n^3}}, \tag{26}$$

ce qui permet d'écrire encore l'inégalité (22) sous la condition

$$r < n \leq \left(\frac{r^4}{24 \log r}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Soit n_1 le plus grand entier qui vérifie cette double inégalité, possible dès que r est suffisamment grand; (23) et (24) sont alors conservées et l'on a pour la troisième somme, en tenant compte

de (26),

$$\left|\sum_{n_1}^{\infty}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon C r\, e^{r\psi(\nu)}\sum_{n_1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{r^4}{12n^3}}}{(n+1)^2};$$

mais

$$\sum_{n_1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{r^4}{12n^3}}}{(n+1)^2} < \int_{n_1}^{\infty} e^{-\frac{r^4}{12x^3}}\frac{dx}{x^2} < \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^4 z^3}{12}}dz = r^{-\frac{4}{3}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^3}{12}}du.$$

Par conséquent,

$$\left|\sum_{n_1}^{\infty}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \frac{\varepsilon C\, e^{r\psi(\nu)}}{r^{\frac{1}{3}}}, \tag{27}$$

et cela, même si $\cos 2\nu$ tend vers zéro dans l'intervalle considéré. En rapprochant cette inégalité de (25) et en tenant compte de (23) et (24), on pourra donc écrire l'inégalité générale

$$|H(re^{i\nu})| < \frac{\varepsilon(r)\, e^{r\psi(\nu)}}{r^{\frac{1}{3}}\left(1 - r^{\frac{2}{3}}\cos 2\nu\right)}, \tag{28}$$

$\varepsilon(r)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, et cela uniformément dans l'angle

$$\frac{\pi}{4} \leq \nu \leq \frac{3\pi}{4}.$$

13. Considérons maintenant l'angle $-\frac{\pi}{4} \leq \nu \leq \frac{\pi}{4}$. Là encore, nous obtiendrons deux inégalités distinctes suivant que z s'éloignera à l'infini sur un rayon vecteur intérieur à l'angle, ou asymptotiquement à un côté de cet angle. On est ainsi conduit à séparer cet angle en deux régions A et B par une courbe asymptote aux deux demi-droites extrêmes $\nu = \pm\frac{\pi}{4}$; on peut alors obtenir deux valeurs différentes pour β, suivant que z s'éloigne à l'infini dans l'une ou l'autre de ces deux régions; mais ces valeurs dépendent de la courbe choisie, et la meilleure approximation correspond à une branche de courbe d'équation

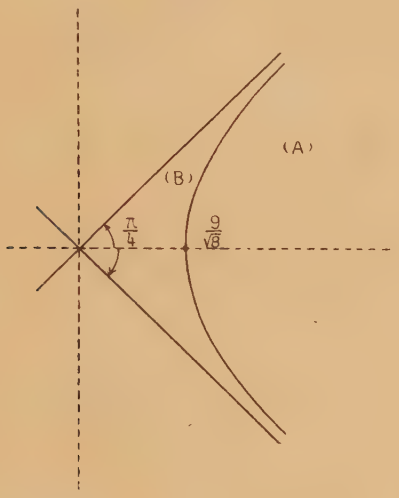
$$r^2(2\cos 2\nu)^3 = \text{const.}$$

Sur la courbe elle-même,

$$x = \sqrt{r}\,(2\cos 2\nu)^{\frac{3}{4}}$$

est une constante, qu'il est commode de choisir égale à 3; on aura donc $x \geqq 3$ dans le domaine A, et $x \leqq 3$ pour tout point de B.

Fig. 3.



Plaçons-nous d'abord dans la région A. Les termes qui apportent à notre série la contribution essentielle sont ceux dont l'indice est compris entre les deux quantités

$$\overline{n}\left(1-\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \overline{n}\left(1+\frac{1}{x}\right);$$

désignons par n_2 et n_3 les indices extrêmes de cet intervalle

$$\overline{n}\left(1-\frac{1}{x}\right) \leqq n_2 < n_3 \leqq \overline{n}\left(1+\frac{1}{x}\right);$$

n_0 conservant sa signification, nous partagerons ainsi la série (9) en quatre sommes

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3,$$

où

$$P_0 = \sum_0^{n_0-1}, \qquad P_1 = \sum_{n_0}^{n_2-1}, \qquad P_2 = \sum_{n_2}^{n_3-1}, \qquad P_3 = \sum_{n_3}^{\infty}.$$

P_0 vérifie encore l'inégalité (23). Pour P_2, on a

$$|P_2| < \varepsilon |c_n| \sum_{n_2}^{n_3-1} \frac{1}{(n+1)^2},$$

avec

$$\sum_{n_2}^{n_3-1} \frac{1}{(n+1)^2} < \int_{n_2}^{n_3} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} < \frac{2}{nx\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} < \frac{9}{4xn};$$

en tenant compte de (15), il vient donc

$$|P_2| < \frac{3\varepsilon C e^{r\psi(\rho)}}{\sqrt{r}\,(2\cos 2\rho)^{\frac{1}{4}}}. \tag{29}$$

Considérons maintenant la somme P_3; pour $n > n_3$, on aura

$$|c_n| = \xi(n)\,\xi(n-1)\ldots\xi(n_3+1)\,|c_{n_3}|; \tag{30}$$

mais

$$\xi^2(n) \leqq 1 + \frac{r^4}{n^2(n_3+1)^2} - \frac{2r^2\cos 2\rho}{n^2}$$

$$< 1 - \frac{2r^2\cos 2\rho}{n^2}\,\frac{1}{x}\,\frac{2+\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2},$$

et, puisque $x \geqq 3$,

$$\xi^2(n) < 1 - \frac{2r^2\cos 2\rho}{x\,n^2} < e^{-\frac{2r^2\cos 2\rho}{xn^2}},$$

$$\log\xi(n) < \frac{-r^2\cos 2\rho}{x\,n^2};$$

on a donc

$$\log[\xi(n_3+1)\,\xi(n_3+2)\ldots\xi(n)] < \frac{-r^2\cos 2\rho}{x}\left[\frac{1}{(n_3+1)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right]$$

$$< \frac{-r^2\cos 2\rho}{x}\left(\frac{1}{n_3+1}-\frac{1}{n+1}\right);$$

en substituant dans (30), il vient

$$|c_n| < |c_{n_3}|\,e^{-\frac{r^2\cos 2\rho}{x}\left(\frac{1}{n_3+1}-\frac{1}{n+1}\right)}$$

et, par suite,

$$|P_3| < \varepsilon\,|c_{n_3}|\,e^{-\frac{r^2\cos 2\rho}{x(n_3+1)}} \sum_{n_3+1}^{\infty} \frac{e^{\frac{r^2\cos 2\rho}{x(n+1)}}}{(n+1)^2}.$$

Enfin,

$$|c_{n_2}| < |c_{\overline{n}}|$$

et

$$\sum_{n_2+1}^{\infty} \frac{e^{\frac{r^2\cos 2\varphi}{x(n+1)}}}{(n+1)^2} < \int_{n_2+1}^{\infty} e^{\frac{r^2\cos 2\varphi}{xz}} \frac{dz}{z^2} = \frac{x}{r^2\cos 2\varphi}\left(e^{\frac{r^2\cos 2\varphi}{x(n_2+1)}} - 1\right)$$

entraînent

$$|P_3| < \frac{\varepsilon C x\, e^{r\psi(\nu)}}{2r\cos 2\varphi} = \frac{\varepsilon C\, e^{r\psi(\nu)}}{\sqrt{r}\,(2\cos 2\varphi)^{\frac{1}{4}}}. \tag{31}$$

Reste à étudier P_4. Pour $n < n_2$, on a

$$|c_n| = \frac{|c_{n_2}|}{\xi(n+1)\,\xi(n+2)\ldots\xi(n_2)}, \tag{32}$$

et l'on peut écrire

$$\xi^2(n) > 1 + \frac{r^4}{n^2(n_2-1)^2} - \frac{2r^2\cos 2\varphi}{n^2}$$

$$> 1 + \frac{2r^2\cos 2\varphi}{n^2}\,\frac{2}{x}\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$> 1 + \frac{4r^2\cos 2\varphi}{n\overline{n}\,x} = 1 + \frac{2x}{n};$$

donc

$$\log \xi(n) > \frac{x}{n+2x},$$

$$\log[\xi(n+1)\,\xi(n+2)\ldots\xi(n_2)]$$

$$> x\left[\frac{1}{n+1+2x} + \frac{1}{n+2+2x} + \ldots + \frac{1}{n_2+2x}\right] > x\int_n^{n_2} \frac{dz}{z+1+2x}$$

$$= x\log\frac{n_2+1+2x}{n+1+2x}.$$

(32) donne alors

$$|c_n| < |c_{n_2}|\left(\frac{n+2x+1}{n_2+2x+1}\right)^x. \tag{33}$$

Cela posé, partageons P_4 en deux parties

$$P_4 = \sum_{n_0}^{n_1-1} + \sum_{n_1}^{n_2-1},$$

n_1 étant de l'ordre de grandeur de x, soit

$$n_1 = k\,x,$$

où k désigne une constante. Alors

$$\left(\frac{n_1 + 2x + 1}{n_2 + 2x + 1}\right)^x < \left(\frac{k_1}{\sqrt{r}}\right)^x,$$

k_1 désignant une nouvelle constante; et, x étant ≥ 3, on aura, pour des valeurs suffisamment grandes de r,

$$|c_{n_1}| < |c_{n_2}| \frac{k_1^3}{r^{\frac{3}{2}}};$$

comme $|c_{n_2}| < |c_n|$, on sait trouver une constante C telle que

$$|c_{n_1}| < \frac{C\,e^{r\Psi(\nu)}}{\sqrt{r}},$$

et l'on peut écrire, pour la première partie de P_1,

$$\left|\sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon\,|c_{n_1}| \sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{\varepsilon C\,e^{r\Psi(\nu)}}{\sqrt{r}}. \tag{34}$$

Pour l'autre partie, (33) donne

$$\left|\sum_{n_1}^{n_2-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \frac{\varepsilon\,|c_{n_2}|}{(n_2+2x+1)^x} \sum_{n_1}^{n_2-1} \frac{(n+2x+1)^x}{(n+1)^2};$$

cette dernière somme est inférieure à

$$\left(1+\frac{2x}{n_1}\right)^2 \sum_{n_1}^{n_2-1} (n+2x+1)^{x-2} < \left(1+\frac{2}{k}\right)^2 \frac{(n_2+2x+1)^{x-1} - (n_1+2x+1)^{x-1}}{x-1}$$

et, par suite,

$$\left|\sum_{n_1}^{n_2-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \frac{\varepsilon C\,|c_{n_2}|}{n_2 x} < \frac{\varepsilon C\,e^{r\Psi(\nu)}}{\sqrt{r}\,(2\cos 2\nu)^{\frac{1}{4}}}.$$

En définitive, cette inégalité, jointe à (29), (31) et (34),

démontre que, dans le domaine A, $H(z)$ vérifie une inégalité de la forme

$$|H(re^{i\nu})| < \frac{\varepsilon C e^{r\psi(\nu)}}{\sqrt{r}\,(2\cos 2\nu)^{\frac{1}{4}}}. \tag{35}$$

14. Il nous reste à étudier le domaine B, pour lequel $x \leqq 3$, et, par suite,

$$\bar{n} \geqq \frac{r^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{9}}. \tag{36}$$

Si n_2 est un entier de l'ordre de $\bar{n}$, donc supérieur à n_0, on a

$$\left|\sum_{n_2+1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon\,|c_{\bar{n}}| \sum_{n_2+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{\varepsilon\,|c_{\bar{n}}|}{n_2+1},$$

d'où résulte, en tenant compte de (15) et (36),

$$\left|\sum_{n_2+1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon C r^{-\frac{4}{3}} e^{r\psi(\nu)}. \tag{37}$$

Prenons pour n_2 la partie entière de $\frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}$. Pour les termes restants, on a

$$\xi^2(n) \geqq 1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{r^2\bar{n}^{-2}\cos 2\nu}{n^4} = 1 + \frac{\frac{1}{2}r^4}{n^4};$$

donc, pour $r < n \leqq n_2$,

$$\log \xi(n) > \frac{\frac{1}{4}r^4}{n^4 + \frac{1}{2}r^4} > \frac{r^4}{6n^4},$$

$$\log[\xi(n+1)\,\xi(n+2)\ldots\xi(n_2)] > \frac{r^4}{6}\left[\frac{1}{(n+1)^4} + \ldots + \frac{1}{n_2^4}\right]$$
$$> \frac{r^4}{18}\left[\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n_2+1)^3}\right],$$

d'où résulte enfin, en vertu de (32) et de l'inégalité $\frac{r^4}{(n_2+1)^3} < 18\sqrt{2}$, déduite de (36),

$$|c_n| < C\,|c_{n_2}|\,e^{-\frac{r^4}{18n^3}} < C r\, e^{r\psi(\nu) - \frac{r^4}{18n^3}}. \tag{38}$$

Mais alors on a

$$|c_n| < \frac{C}{\sqrt{r}} e^{r\psi(\nu)}$$

pour

$$n < \frac{r^{\frac{1}{3}}}{3(\log r)^{\frac{1}{3}}},$$

et, si n_1 est la partie entière de ce dernier terme, on en conclut que

$$(39) \qquad \left| \sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \varepsilon |c_{n_1}| \sum_{n_0}^{n_1} \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon C \frac{e^{r\psi(\nu)}}{\sqrt{r}}.$$

Pour la dernière somme $\sum_{n_1}^{n_2}$, l'inégalité (38) nous donne

$$(40) \qquad \left| \sum_{n_1}^{n_2} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \varepsilon C r e^{r\psi(\nu)} \sum_{n_1}^{n_2} \frac{e^{-\frac{r^4}{18n^3}}}{(n+1)^2}$$

$$< \varepsilon C r e^{r\psi(\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^4}{18z^3}} \frac{dz}{z^2} < \varepsilon C r^{-\frac{1}{3}} e^{r\psi(\nu)}.$$

La conclusion de tous ces calculs est que, lorsque z s'éloigne à l'infini dans le domaine B, il existe une constante C telle que l'on ait

$$|H(re^{i\nu})| < \varepsilon C r^{-\frac{1}{3}} e^{r\psi(\nu)}.$$

En rapprochant cette inégalité de (35), on peut écrire enfin l'inégalité unique

$$(41) \qquad |H(re^{i\nu})| < \frac{\varepsilon(r) e^{r\psi(\nu)}}{r^{\frac{1}{3}}\left(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2\nu\right)^{\frac{1}{4}}},$$

$\varepsilon(r)$ tendant vers zéro quand r augmente indéfiniment, et cela uniformément pour $-\frac{\pi}{4} \leq \nu \leq \frac{\pi}{4}$.

15. Revenons à la fonction $F(z)$. Les résultats précédents, qui ont été établis pour une série de la forme (5), ne s'appliquent qu'aux deux combinaisons $\frac{F(z) - F(-z)}{z}$ et $\frac{F(z) + F(-z) - 2F(0)}{z^2}$. Donc si la série (1) converge, la fonction entière $F(z)$, qu'elle

représente, satisfait, pour $r > 1$, aux quatre inégalités suivantes :

$$(42) \qquad |F(z) \pm F(-z)| < \frac{\varepsilon(r) e^{r\psi(\nu)} r^{\beta}}{1 - r^{\frac{2}{3}} \cos 2\nu}$$

pour $\frac{\pi}{4} \leqq \nu \leqq \frac{3\pi}{4}$; et

$$(43) \qquad |F(z) \pm F(-z)| < \frac{\varepsilon(r) e^{r\psi(\nu)} r^{\beta}}{\left(1 + r^{\frac{2}{3}} \cos 2\nu\right)^{\frac{4}{4}}}$$

pour $-\frac{\pi}{4} \leqq \nu \leqq \frac{\pi}{4}$ et pour $\frac{3\pi}{4} \leqq \nu \leqq \frac{5\pi}{4}$. Au signe $+$ correspond la valeur $\beta = \frac{5}{3}$, et, au signe $-$, $\beta = \frac{2}{3}$.

Telles sont les conditions nécessaires pour qu'une fonction entière $F(z)$ soit développable en série de Stirling. Un calcul tout à fait analogue conduirait pour la série de Bessel à des inégalités de la même forme, avec le seul changement qu'au signe $+$ correspondrait $\beta = \frac{2}{3}$, et, au signe $-$, la valeur $\beta = \frac{5}{3}$.

Ces conditions sont-elles suffisantes? Pas tout à fait, mais les conditions suffisantes, que nous allons maintenant étudier, en sont très voisines, et permettent même de conclure que les inégalités (42) et (43) cessent d'être vraies pour toute valeur de β inférieure à celles que nous venons d'indiquer.

III. — Fonctions entières développables en séries de Stirling.

16. D'après ce que nous venons de voir, on peut se borner à considérer les fonctions entières d'ordre $\leqq 1$. Étant donnée une telle fonction $F(z)$, nous savons former son développement limité, et l'étude de son terme complémentaire va nous conduire à une condition suffisante de convergence pour le développement illimité.

Nous allons voir en effet que ce terme complémentaire tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment, si $F(z)$ vérifie certaines inégalités. Considérons d'abord R_{2n+1}, sous la forme (26) (§ 6). Le chemin d'intégration est seulement assujetti à entourer les points $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, et il y a évidemment intérêt à le choisir de façon que le facteur

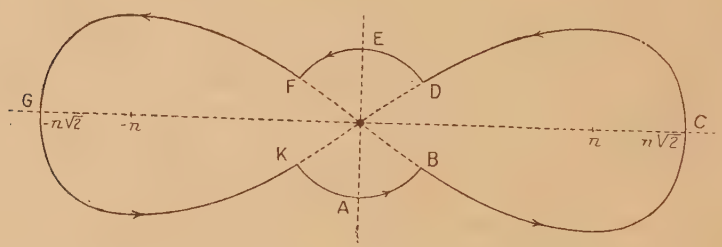
$$\left| \frac{z(z^2 - 1^2) \ldots (z^2 - n^2)}{\zeta(\zeta^2 - 1^2) \ldots (\zeta^2 - n^2)} \right|$$

soit aussi petit que possible. Or, z étant fixe, la valeur inverse de ce rapport est asymptotique à ce que nous avons appelé $|c_n|$, mais dans lequel la lettre z aurait été remplacée par ζ. Nous savons que, si $\zeta = re^{iv}$, le maximum de $|c_n|$ est $|c_{\bar{n}}|$, d'indice $\bar{n} = \frac{r}{\sqrt{2\cos 2v}}$, ce qui nous conduit à intégrer le long du lieu des points ζ pour lesquels

$$n = \frac{r}{\sqrt{2\cos 2v}}.$$

C'est l'équation d'une lemniscate de Bernoulli; enfin on évitera l'origine, point singulier pour l'intégrale, à l'aide de deux arcs de cercle DEF et KAB, de centre O et rayon $\log n$. En définitive, on adopte la ligne d'intégration ABCDEFGKA, qui, ainsi choisie, va nous fournir, avec une très grande précision, la condition qui assure la convergence de la série; tout autre chemin que la lemniscate nous conduirait d'ailleurs à une inégalité moins précise (1).

Fig. 4.



La symétrie par rapport à l'origine permet alors de réduire notre intégrale à la forme

$$(44) \qquad R_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\dots(\zeta^2-n^2)}\,\frac{F_1(\zeta)}{\zeta^2-z^2}\,d\zeta,$$

où l'on a posé

$$(45) \qquad F_1(\zeta) = \zeta[F(\zeta)-F(-\zeta)] + z[F(\zeta)+F(-\zeta)].$$

L'argument v_n du point de raccordement D de l'arc de cercle et

(1) Toutefois, on pourrait peut-être arriver à préciser cette inégalité, au voisinage immédiat de $v = \pm\frac{\pi}{4}$, en raccordant différemment les deux arcs de lemniscate.

de la lemniscate est donné par

$$\cos 2\varphi_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2, \tag{46}$$

et l'on a évidemment $\varphi_n < \frac{\pi}{4}$, avec

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \frac{\pi}{4}.$$

Cela posé, mettons (44) sous la forme suivante :

$$R_{2n+1} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \times \frac{1}{2\pi i}\int_{ABCDE} \frac{(-1)^n (n!)^2 \Gamma(\zeta-n)}{\Gamma(\zeta+n+1)} \frac{F_1(\zeta)}{\zeta^2-z^2}\, d\zeta;$$

le premier facteur du second membre tend vers la limite $\frac{\sin \pi z}{\pi}$, lorsque n augmente indéfiniment, et il suffit d'étudier cette nouvelle intégrale, dont nous allons examiner séparément chacune des trois parties

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}, \qquad Q_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{BCD}, \qquad T_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{DE}.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$f_n(\varphi) = \frac{(-1)^n (n!)^2 \Gamma(\zeta-n)}{\Gamma(\zeta+n+1)}, \tag{47}$$

qui s'écrit encore, grâce à l'identité bien connue

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

$$f_n(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\zeta} \frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(n+\zeta)\Gamma(n-\zeta)} \frac{n^2}{n^2-\zeta^2}. \tag{48}$$

Ce qui est essentiel dans cette étude, c'est la façon dont cette fonction $f_n(\varphi)$ se comporte le long de la ligne d'intégration, pour les très grandes valeurs de n.

Tout d'abord, le long de l'arc BCD, d'après le choix même de la lemniscate, $f_n(\varphi)$ est équivalent à $\frac{\zeta}{c_n}$; le calcul du paragraphe 9, où z serait remplacé par ζ, nous permet donc d'écrire l'inégalité

$$|f_n(\varphi)| < Ce^{-r\psi(\varphi)} \qquad (-\varphi_n \leq \varphi \leq \varphi_n).$$

Le long des arcs de cercle AB et DE, $|\zeta|$ étant seulement de l'ordre de $\log n$, on prévoit que, dans l'expression (48),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(n+\zeta)\Gamma(n-\zeta)} \frac{n^2}{n^2-\zeta^2} = 1 ;$$

un calcul simple, basé sur l'expression asymptotique (13) de la fonction Γ, permettrait d'ailleurs de démontrer rigoureusement ce résultat (1). Dans ces conditions, on sait donc trouver une constante telle que

$$|f_n(\rho)| < Ce^{-r|\pi\sin\rho|} \qquad \left(\rho_n \leqq |\rho| \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{49}$$

17. Cela posé, admettons que $F(\zeta) = F(re^{i\rho})$ satisfasse, pour $r \geqq r_0$, aux deux inégalités suivantes

$$\begin{cases} |F(\zeta) - F(-\zeta)| < e^{r\psi(\rho)}\varepsilon(r) \\ |F(\zeta) + F(-\zeta)| < e^{r\psi(\rho)} r\varepsilon(r), \end{cases} \tag{50}$$

$\varepsilon(r)$ désignant une fonction de r qui tend vers zéro lorsque r augmente indéfiniment, de façon que l'intégrale

$$\int_a^\infty \frac{\varepsilon(r)\,dr}{r} \quad \text{soit convergente.} \tag{51}$$

Ces conditions, assez voisines des conditions nécessaires trouvées dans la première partie, permettent d'écrire

$$|F_1(re^{i\rho})| < Ce^{r\psi(\rho)} r\varepsilon(r),$$

et suffisent, comme il est maintenant facile de le voir, pour que R_{2n+1} tende vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Considérons d'abord

$$|Q_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\rho_n}^{+\rho_n} |f_n(\rho)| \left|\frac{F_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2}\right| \left|\frac{d\zeta}{d\rho}\right| d\rho ;$$

le long de BCD, on a

$$\left|\frac{d\zeta}{d\rho}\right| = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\rho}},$$

(1) Pour le détail du calcul, cf. *Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton* (*Ann. Éc. Norm.*, t. XXXIX, p. 361).

et, par suite,

$$|Q_n| < C\int_{-\varphi_n}^{+\varphi_n} \varepsilon(r)\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = 2C\int_0^{\varphi_n} \varepsilon\left(n\sqrt{2\cos 2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}.$$

$\varepsilon(r)$ étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, pour $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{6}$, on peut négliger l'intégrale relative à cet intervalle, et considérer seulement

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\varphi_n} \varepsilon(r)\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} < 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\varphi_n} \varepsilon(r)\frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{\cos 2\varphi} = 2\int_{\log n}^{n} \varepsilon(r)\frac{dr}{r},$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; il en est donc de même de Q_n.

Les intégrales P_n et T_n sont analogues, et il nous suffit d'étudier

$$T_n = \frac{\log n}{2\pi}\int_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{2}} f_n(\varphi)\frac{F_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2}e^{i\psi}\,d\varphi.$$

En remplaçant $f_n(\varphi)$ et $F_1(\zeta)$ par les limites supérieures de leurs modules, on a immédiatement

$$|T_n| < C\varepsilon(\log n)\int_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{2}} e^{r[\psi(\varphi) - \pi\sin\varphi]}\,d\varphi.$$

L'exposant de e ne s'annulant que si $\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, décomposons l'intégrale en deux parties

$$\int_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r[\psi(\varphi) - \pi\sin\varphi]}\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.$$

La deuxième intégrale est finie; pour la première, rappelons-nous que φ_n est infiniment voisin de $\frac{\pi}{4}$, pour lequel $\psi(\varphi) - \pi\sin\varphi$ s'annule, de sorte que pour n supérieur à un certain nombre n_0, on aura

$$\psi(\varphi) - \pi\sin\varphi < 1,$$

dans l'intervalle $\varphi_n \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$. Bien plus, l'équation (46) entraîne

$$\frac{\pi}{4} - \varphi_n < \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2,$$

d'où résulte enfin

$$\int_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r[\psi(\varphi)-\pi\sin\varphi]}d\varphi < \int_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r}d\varphi = n\left(\frac{\pi}{4}-\varphi_n\right) < \frac{1}{2}\frac{\log^2 n}{n},$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. T_n et P_n sont donc au plus de l'ordre de $\varepsilon(\log n)$, et tendent bien vers zéro quand n augmente indéfiniment; ce qui démontre la proposition énoncée.

Pour le reste de rang pair R_{2n}, on trouverait une expression tout à fait analogue à celle de R_{2n+1}, ce qui permet de démontrer qu'il tend également vers zéro, si les conditions (5o) sont satisfaites.

En résumé, les fonctions entières $F(z)$, qui satisfont aux inégalités (5o), sont développables en série de Stirling sous la forme (1), ou même sous la forme

$$F(z) = F(0) + \frac{z}{1}\nabla\Delta F(-1) + \frac{z^2}{2!}\overset{2}{\Delta} F(-1) + \frac{z(z^2-1^2)}{3!}\nabla\overset{3}{\Delta} F(-2) + \frac{z^2(z^2-1^2)}{4!}\overset{4}{\Delta} F(-2) + \ldots.$$

E.-T. Whittaker [1] et K. Ogura [1, 2] ont également donné des conditions suffisantes de convergence, mais moins précises, et qui laissent de côté des fonctions qui entrent dans notre classification. Parmi les travaux récents relativement à la série de Stirling, nous signalerons particulièrement ceux de G. Pólya [1, 2], F. Carlson [2], G. Valiron [1], G. Pólya et G. Szegö [1].

Par un raisonnement analogue à celui qui précède, on démontrerait que, pour que la série de Bessel converge, il suffit que soient vérifiées les inégalités que l'on déduirait de (5o) par permutation des deux seconds membres.

18. Posons

$$h(\varphi) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|F(re^{i\varphi})|}{r}. \tag{52}$$

Si $F(z)$ est développable en série de Stirling, les inégalités (42) et (43) nous apprennent que, nécessairement,

$$h(\varphi) \leqq \psi(\varphi);$$

réciproquement, nous pouvons affirmer, d'après le dernier paragraphe, que $F(z)$ donne naissance à une série absolument convergente, si l'on a l'inégalité

$$h(\varphi) < \psi(\varphi),$$

pour toutes les valeurs de φ. L'affirmation n'est plus possible si cette inégalité n'exclut pas l'égalité; mais le cas, où $h(\varphi)$ n'atteint $\psi(\varphi)$ que pour un nombre fini de valeurs de φ, est particulièrement intéressant, car on peut substituer à (50) de nouvelles inégalités moins restrictives.

Nous désignerons par α un point tel que

$$h(\alpha) = \psi(\alpha), \qquad \text{avec} \qquad h(\varphi) < \psi(\varphi) \quad \text{pour} \quad \varphi \leqq \alpha.$$

Remarquons d'abord qu'un tel point ne se trouve jamais dans les deux intervalles $\frac{\pi}{4} < |\varphi| < \frac{3\pi}{4}$, car si les deux courbes $h(\varphi)$ et $\psi(\varphi)$ avaient un point commun dans l'un d'eux, elles en auraient nécessairement une infinité; c'est ce qui résulte d'un théorème général de E. Phragmén et E. Lindelöf (¹). Mais α peut prendre une valeur quelconque en dehors de ces deux intervalles. Il suffit, pour le voir, d'étudier la fonction exponentielle

$$F(z) = t^{2z}.$$

Pour cette fonction, $\overset{2s}{\Delta} F(-s) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s}$, et le terme général du développement de Stirling est de l'ordre de

$$\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{t - \frac{1}{t}}{2} \right|^{2s};$$

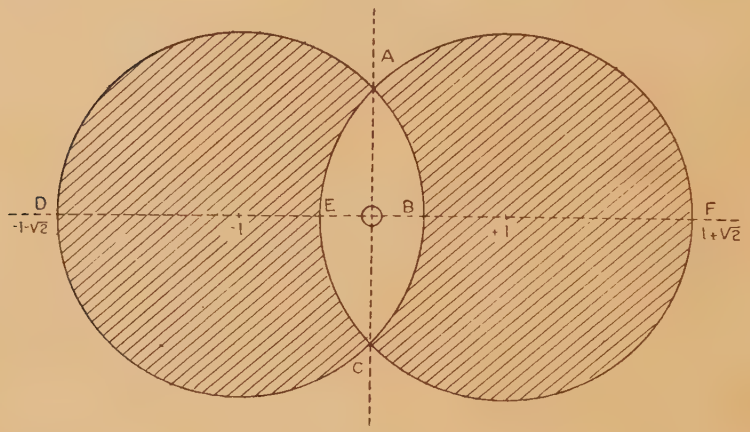
la série converge donc absolument si $\left| t - \frac{1}{t} \right| < 2$, c'est-à-dire dans la région hachurée de la figure, et diverge si $\left| t - \frac{1}{t} \right| > 2$. Il n'y a ambiguïté que sur la frontière $\left| t - \frac{1}{t} \right| = 2$, composée des deux cercles de centres ± 1, et de rayon $\sqrt{2}$.

(¹) *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (*Acta math.*, t. XXXI, 1908, p. 397).

Soit t un point de cette frontière; au lieu d'effectuer le calcul direct avec la variable t, il est commode, pour étudier t^{2z}, d'employer la transformation

$$t - \frac{1}{t} = 2\xi;$$

Fig. 5.



on peut alors poser $\xi = e^{2i\theta}$, et, si l'on choisit la branche

$$t = \xi + \sqrt{1+\xi^2},$$

avec $t = 1+\sqrt{2}$ pour $\xi = +1$, il suffit de faire varier θ de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$ pour que t décrive l'arc CFA. Dans ces conditions,

$$\sqrt{1+\xi^2} = \sqrt{2\cos 2\theta}\, e^{i\theta};$$

un calcul élémentaire donne enfin

$$(53) \qquad \begin{cases} |t| = \sqrt{\cos 2\theta} + \sqrt{2}\cos\theta, \\ \arg t = \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right), \end{cases}$$

de sorte qu'on peut poser

$$(54) \qquad |t^{2z}| = e^{r\lambda(\rho,\theta)},$$

où

$$(55) \qquad \lambda(\rho,\theta) = \cos\rho\log\left(\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\right)^2 - 2\sin\rho\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right).$$

Étudions d'abord λ comme fonction de θ, φ restant fixe, et formons les dérivées

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\theta} = -2\sqrt{2}\,\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\theta^2} = -2\sqrt{2}\,\frac{\cos(\varphi-\theta)}{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

On en déduit la discussion suivante :

1° $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$; $\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}$ est négatif dans l'intervalle $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$, et

$$\lambda\left(\varphi, \pm\frac{\pi}{4}\right) = \mp\pi\sin\varphi;$$

on a donc la double inégalité

$$-\pi\sin\varphi < \lambda(\varphi,\theta) < \pi\sin\varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\right); \tag{56}$$

2° $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$; $\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}$ s'annule au seul point $\theta = -\varphi$; $\lambda(\varphi,\theta)$ y prend la valeur

$$\lambda(\varphi,-\varphi) = \cos\varphi\log\left(\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 + 2\sin\varphi\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right);$$

c'est justement $\psi(\varphi)$, et c'est un maximum, comme le montre la dérivée seconde.

3° On passe au cas $\frac{3\pi}{4} \leqq |\varphi| \leqq \pi$ en ajoutant π à un angle φ de l'intervalle précédent, ce qui change λ en $-\lambda$, sans changer ψ. En se rappelant que $\psi(\varphi) > |\pi\sin\varphi|$ dans cet intervalle, on voit de suite que $\lambda(\varphi,\theta) < \psi(\varphi)$.

Lorsque t décrit l'arc ABC, les deux derniers intervalles échangent leur rôle. En résumé, quand t décrit le contour ABCFA, on a

$$|t^{2z}| \leqq e^{r\psi(\varphi)},$$

le maximum indiqué étant atteint en un point et un seul du contour; c'est l'un des points A ou C si $\frac{\pi}{4} \leqq |\varphi| \leqq \frac{3\pi}{4}$, mais si φ est situé en dehors de ces deux intervalles, c'est un point différent.

Réciproquement, si t est maintenant un point fixe, autre que A ou C, situé sur notre contour, il suffit de considérer, dans (55), l'exposant $\lambda(\varphi,\theta)$ comme fonction de φ; et l'on a

$$\lambda(\varphi,\theta) \leqq \psi(\varphi),$$

l'égalité n'ayant lieu que pour la valeur unique $\varphi = -\theta$. La fonction

$$\mu(\varphi) = \lambda(\varphi, -\alpha)$$

est donc telle que l'on ait

$$\mu(\alpha) = \psi(\alpha), \qquad \text{avec} \qquad \mu(\varphi) < \psi(\varphi)$$

pour toute autre valeur de φ, et l'on peut en outre vérifier que

$$(57) \qquad \begin{cases} \mu'(\alpha) = \psi'(\alpha) \\ \mu''(\alpha) = \psi''(\alpha) - \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}}. \end{cases}$$

19. Cela posé, admettons que, pour $r > r_0$, la fonction entière

$$F(\zeta) = F(re^{i\varphi})$$

soit telle que l'on ait

$$h(\varphi) < \psi(\varphi),$$

pour toute valeur de φ, sauf pour un point α de l'un des deux intervalles convenables, par exemple $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$, au voisinage duquel on a

$$(58) \qquad \begin{cases} |F(\zeta) - F(-\zeta)| < e^{r\mu(\varphi)} r^{\frac{1}{2}} \varepsilon(r), \\ |F(\zeta) + F(-\zeta)| < e^{r\mu(\varphi)} r^{\frac{3}{2}} \varepsilon(r), \end{cases}$$

$\varepsilon(r)$ étant une fonction de r qui tend vers zéro quand r augmente indéfiniment.

Le terme complémentaire R_{2n+1} tend évidemment vers zéro, sauf peut-être la portion

$$Q'_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} f_n(\varphi) \frac{F_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta;$$

η étant assez petit, et n assez grand, pour que l'arc $(\eta - \alpha, \eta + \alpha)$ soit tout entier sur la lemniscate, on a donc

$$|Q'_n| < C \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} \sqrt{r}\, e^{-r[\psi(\varphi) - \mu(\varphi)]} \varepsilon(r) \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}.$$

Mais de (57) résulte, dans l'intervalle d'intégration,

$$\psi(\varphi) - \mu(\varphi) > C(\varphi - \alpha)^2$$

et, par suite,

$$|Q'_n| < C\varepsilon(n\sqrt{2\cos 2\alpha}) \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-Cn(\varphi-\alpha)^2}\sqrt{n}\, d\varphi$$

$$= C\varepsilon(n\sqrt{2\cos 2\alpha}) \int_{-\eta\sqrt{n}}^{+\eta\sqrt{n}} e^{-Cu^2} du < C\varepsilon(n\sqrt{2\cos 2\alpha}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Cu^2} du,$$

qui tend bien vers zéro quand n augmente indéfiniment.

La série de Stirling converge donc si $h(\varphi) < \psi(\varphi)$, sauf en un nombre fini de points α de la nature indiquée, situés dans les intervalles $0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leq |\varphi| \leq \pi$, sous la condition que soient satisfaites les inégalités (58) relatives à chacun de ces points. Ces conditions sont effectivement moins restrictives que celles énoncées en (50), pour le cas général.

Ici encore, on obtiendrait des conditions suffisantes pour la convergence de la série de Bessel en permutant les deux seconds membres des inégalités relatives à la série de Stirling.

20. Une application simple des propositions auxquelles nous sommes arrivés est fournie par la fonction t^{2z} elle-même. Nous savons en effet qu'elle satisfait aux conditions (58), dans le domaine hachuré limité par le contour ABCFA. Les deux combinaisons $t^{2z} \pm t^{-2z}$ se représentent donc, dans ce domaine, par les deux séries de Stirling

$$t^{2z} + t^{-2z} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s},$$

$$t^{2z} - t^{-2z} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s+1}.$$

Mais il n'en est plus de même si t est à l'intérieur du contour ADCEA, bien que les deux développements soient encore convergents. En effet, on peut revenir au premier domaine par le changement de t en $-t$, qui ne modifie pas les deux séries, mais change les fonctions aux premiers membres. Ainsi, à l'intérieur de ADCEA, la première série représente la fonction $(-t)^{2z} + (-t)^{-2z}$, et la deuxième représente la fonction $(-t)^{2z} - (-t)^{-2z}$, et l'on voit qu'aux points de raccordement C et A des deux domaines, la somme de la première reste continue, tandis que l'autre donne l'exemple d'une discontinuité.

21. La série de Stirling donne lieu à une remarque qui rappelle les propriétés des polynomes d'interpolation. En effet, pour former la série de Stirling qui correspond à une fonction donnée $F(z)$, il suffit de connaître les valeurs de cette fonction aux points $z = 0$, ± 1, ± 2, ... On en déduira aisément les différences successives qui entrent comme coefficients dans la série. Mais il y a toujours une infinité de fonctions qui prennent les valeurs $F(0)$, $F(\pm 1)$, $F(\pm 2)$, ... aux points en question. Toutes ces fonctions donnent ainsi naissance à une même série de Stirling, mais, parmi elles, il n'y en a qu'une au plus qui soit entière et satisfasse aux inégalités (5o). En effet, s'il y en avait deux, leur différence serait elle-même développable en série de Stirling, et, tous les coefficients de cette série étant nuls, s'annuleraient identiquement.

Par conséquent, parmi toutes les fonctions entières qui prennent des valeurs données aux points $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la série de Stirling représente celle de croissance minima.

22. D'une manière plus générale, on pourra chercher à représenter une fonction $F(z)$ par un développement de la forme

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + a'_s z) z(z^2 - \omega^2)\ldots(z^2 - s^2\omega^2), \tag{59}$$

ω étant un nombre positif et convenablement choisi. De ce que nous avons vu dans ce Chapitre, il résulte que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'un tel développement soit possible, est que $F(z)$ soit une fonction entière satisfaisant à une inégalité de la forme

$$|F(re^{i\varphi})| < Ce^{cr}, \tag{60}$$

où C et c sont deux constantes. En effet, (59) est une série de Stirling en $\frac{z}{\omega}$, donc sa convergence entraîne (6o) si ωc est supérieur au maximum de $\psi(\varphi)$, c'est-à-dire $c < \frac{\pi}{\omega}$. Inversement, (6o) ayant lieu, la convergence de (59) sera assurée si ωc st inférieur au minimum de $\psi(\varphi)$, c'est-à-dire $\omega < \frac{2}{c} \log(1 + \sqrt{2})$.

CHAPITRE III.

L'ORDRE DE LA SÉRIE DE TAYLOR SUR SON CERCLE DE CONVERGENCE.

Les recherches de J. Hadamard.

23. Avant d'aller plus loin dans l'étude de la série de Stirling, nous nous arrêterons un moment pour rappeler certains théorèmes de J. Hadamard (1), relativement à la notion d'ordre d'une série de Taylor sur son cercle de convergence. Ces théorèmes nous permettront de retrouver, par une nouvelle voie, les résultats que nous venons d'établir, et nous aurons également à en faire usage dans l'étude de la série de Newton et de la série de facultés. Pour la commodité du lecteur, nous réunissons dans ce Chapitre ceux des résultats de J. Hadamard dont nous aurons besoin dans la suite, en y joignant quelques remarques simples pour les adapter à notre but.

Soit $f(z)$ une fonction définie par une série de Taylor

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

(1) Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (*J. Math. pures appl.*, 4e série, t. VIII, 1892, p. 154-186). Les recherches de J. Hadamard ont été poursuivies, dans deux Mémoires importants, par E. Fabry, *Ordre des points singuliers de la série de Taylor* (*Acta math.*, t. XXXVI, 1913, p. 69-104), et G.-H. Hardy, *A theorem concerning Taylor's series* (*Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XLIV, 1913, p. 147-160); *Note in addition to a paper on Taylor's series* (*Ibid.*, vol. XLV, 1914, p. 77-84). Sur cette question, voir aussi Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série* (*J. Math. pures et appliquées*, 3e série, t. IV, 1878, p. 5-56 et p. 377-416); P. Dienes, *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques*, Paris, 1913, p. 1-32.

de rayon de convergence 1. L'ordre ω de $f(z)$ sur son cercle de convergence est, d'après la définition de J. Hadamard,

$$\omega = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log |\, n a_n \,|}{\log n}; \tag{1}$$

quelque petit que soit ε, positif, il existe donc un nombre positif n_0 tel que

$$|\, a_n \,| < n^{\omega - 1 + \varepsilon} \qquad \text{si} \qquad n > n_0,$$

tandis que, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$|\, a_n \,| > n^{\omega - 1 - \varepsilon}.$$

Pour définir l'ordre en un point ou sur une partie du cercle de convergence, J. Hadamard introduit la notion d'écart d'une fonction sur un arc de courbe. Si les intégrales

$$n \int_a^b \cos n\theta f(e^{i\theta})\, d\theta, \qquad n \int_a^b \sin n\theta f(e^{i\theta}) d\theta$$

restent finies quand n augmente indéfiniment, et si la limite supérieure de leurs valeurs absolues est I, a et b étant des limites quelconques intérieures à l'intervalle (α, β), la fonction $f(z)$ est dite à écart fini et égal à I sur l'arc (α, β) du cercle $|\, z \,| = 1$.

Étant alors donnée la dérivée généralisée [1]

$$z^{\alpha} \mathrm{D}_z^{\alpha} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} z^n,$$

on entend par l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) un nombre ω tel que

$$\mathrm{D}_z^{-\omega-\varepsilon} f(z)$$

soit finie, continue et à écart fini sur cet arc, quel que soit le nombre positif ε, l'une au moins de ces propriétés faisant défaut à

$$\mathrm{D}_z^{-\omega+\varepsilon} f(z).$$

Une conséquence immédiate de cette définition est que la dérivée

---

[1] Sur l'extension de la notion de dérivée à des ordres non entiers, $\gtrless 0$, *voir* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 154-162, et RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, 1892, p. 353-366.

d'ordre α d'une fonction d'ordre ω est d'ordre $\omega + \alpha$. L'ordre en un point singulier $e^{i\theta_0}$ est l'ordre sur un arc infiniment petit comprenant ce point; l'ordre en un point régulier est égal à $-\infty$. Si l'ordre total sur le cercle $|z| = 1$ est égal à ω, il y a, sur ce cercle, un point au moins d'ordre ω.

Relativement à ce nombre ω, on a les théorèmes suivants :

LEMME I. — *L'ordre d'une fonction sur un arc* (α, β) *n'est pas altéré quand on la multiplie par une fonction holomorphe et différente de zéro le long de cet arc.*

LEMME II. — *L'ordre du produit de deux fonctions d'ordre positif est au plus égal à la somme des ordres des facteurs.*

Dans la démonstration de J. Hadamard, un ordre négatif peut être remplacé par zéro, de sorte que :

LEMME III. — *Le produit de deux fonctions, dont une seule est d'ordre positif* ω, *est au plus d'ordre* ω.

Mais si les deux ordres sont négatifs, on peut préciser et démontrer le

LEMME IV. — *L'ordre du produit de deux fonctions d'ordres négatifs est au plus égal au plus grand des deux ordres.*

En effet, soient f_1 et f_2 d'ordres ω_1 et ω_2 $(0 > \omega_1 \geq \omega_2)$, et soit $n - 1$ la partie entière de $-\omega_1$; considérons l'expression de la dérivée

$$D_z^n[f_1(z)f_2(z)] = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} D_z^{n-s} f_1(z) \cdot D_z^s f_2(z).$$

D'après le lemme III, le premier terme $D_z^n f_1(z) \cdot f_2(z)$ est, comme $D_z^n f_1(z)$, d'ordre $n + \omega_1$ au plus; l'ordre du dernier terme est $\leq n + \omega_2 \leq n + \omega_1$; et tous les autres termes, dont les deux facteurs sont d'ordre non positif, sont au plus d'ordre zéro. Comme il résulte de la définition que la somme des deux fonctions d'ordre ω est au plus d'ordre ω, et que l'ordre de la somme de deux fonctions d'ordres différents est nécessairement égal au plus grand, nous voyons bien que $D_z^n[f_1(z)f_2(z)]$ est d'ordre $n + \omega_1$ au plus.

24. L'intérêt de cette notion d'ordre provient surtout de ce qu'elle établit une certaine correspondance entre l'ordre de grandeur de $f(z)$ aux points singuliers situés sur le cercle de convergence et l'ordre de croissance des coefficients a_n. On a, en effet, les théorèmes suivants :

LEMME V. — *Si les coefficients a_n d'une série entière*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

sont tels que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\omega-1}} = 0; \qquad \omega > 0, \tag{2}$$

$f(z)$ converge pour $|z| < 1$, et l'on a

$$\lim_{|z|\to 1} (1-|z|)^{\omega} f(z) = 0,$$

et cela uniformément pour tout le cercle $|z| = 1$, en supposant que z s'approche d'un point de ce cercle par valeurs intérieures.

On a, en effet,

$$(1-z)^{-\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} z^n, \tag{3}$$

et (2) s'écrit encore

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\binom{\omega+n-1}{n}} = 0;$$

donc, quel que soit ε positif, on sait trouver n_0 entier tel que

$$|a_n| < \varepsilon \binom{\omega+n-1}{n}, \qquad \text{pour} \qquad n \geq n_0, \tag{4}$$

et, par suite,

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n \right| < \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} |z|^n < \varepsilon (1-|z|)^{-\omega};$$

donc,

$$(1-|z|)^{\omega} |f(z)| < (1-|z|)^{\omega} \left| \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n z^n \right| + \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

LEMME VI. — *A étant une certaine constante, si*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\omega-1}}=A,\qquad \omega>0,$$

on a

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^{\omega}f(z)=A\Gamma(\omega),$$

lorsque z tend vers 1 le long d'une courbe intérieure au cercle $|z|=1$, *et non tangente à ce cercle* (1).

Ce théorème est encore dû à J. Hadamard, mais P. Appell l'avait démontré auparavant en supposant A réel et z sur le rayon.

Si $A=0$, la proposition résulte du lemme précédent, car $\frac{1-z}{1-|z|}$ est fini sur une courbe non tangente. Si A n'est pas nul, notre hypothèse entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-A\Gamma(\omega)\binom{\omega+n-1}{n}}{n^{\omega-1}}=0.$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas $A=0$, et nous savons que

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n-A\Gamma(\omega)\binom{\omega+n-1}{n}\right]z^n=0,$$

ce qui exprime notre proposition, en tenant compte de (3).

Le théorème ne subsiste pas pour $\omega=0$, mais A. Pringsheim démontre (2) que l'on a alors

$$\lim_{z\to 1}\frac{f(z)}{\log\frac{1}{1-z}}=A.$$

LEMME VII. — *Si l'on a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\omega-1}}=0,\qquad \omega>0,$$

la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n(1-z)^{\omega}$$

---

(1) Pour abréger, un arc de courbe sera dit « non tangent au cercle, au point $z=1$ », s'il est intérieur à l'angle formé par deux cordes du cercle, issues de ce point.

(2) *Sitzungsber. Akad. München*, 1901, p. 522.

est uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq z \leqq 1$, *ainsi que sur toute courbe non tangente aboutissant au point* $z = 1$.

On sait que, sur une telle courbe,

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < C,$$

donc, l'inégalité (4) entraîne

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n (1-z)^{\omega} \right| < C^{\omega} \varepsilon (1-|z|)^{\omega} \sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{\omega+n-1}{n} |z|^n < C^{\omega} \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Si $\omega = 0$, le théorème ne subsiste pas, mais alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^{-1}$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $\frac{1}{2} \leqq z \leqq 1$. En effet, $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$ est équivalent à

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

et, par suite,

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n \right| < \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{z^n}{n} < \varepsilon \log \frac{1}{1-z}.$$

25. Les théorèmes précédents font intervenir l'ordre de $f(z)$ sur son cercle de convergence tout entier. Du lemme V, on passe aisément au cas où l'on ne se donne cet ordre que sur une partie du cercle.

Lemme VIII. — *Si l'ordre de* $f(z)$ *sur un arc déterminé* (α, β) *du cercle de convergence, et à ses extrémités, est égal au nombre positif* ω, *on a :*

1° $$\lim_{|z| \to 1} (1-|z|)^{\omega+\varepsilon} f(z) = 0,$$

quel que soit ε *positif, et cela uniformément, pourvu que* z *tende vers un point de* (α, β) *par valeurs intérieures au cercle.*

2° *Si* $1(z)$ *désigne l'écart sur l'arc de cercle de rayon* $|z|$

et limité aux mêmes extrémités que (α, β), *le produit*

$$(1-|z|)^{\omega+\varepsilon} I(z)$$

tend aussi vers zéro.

Et inversement :

LEMME IX. — *Si les quantités*

$$(1-|z|)^{\omega}|f(z)| \quad \text{et} \quad (1-|z|)^{\omega}|I(z)|$$

restent bornées lorsque z tend vers un point de l'arc (α, β) *par valeurs intérieures au cercle,* $f(z)$ *est d'ordre* ω *au plus, sur cet arc* (α, β).

Malheureusement, il est presque toujours très difficile de bien discerner l'ordre de grandeur de l'écart I d'une fonction sur son cercle de convergence. D'autre part, E. Borel a fait remarquer (1) que l'ordre et le degré d'infinitude d'une fonction peuvent être très différents l'un de l'autre, de sorte que, si l'on ne fait aucune hypothèse sur l'écart, on ne peut indiquer qu'une limite moins précise pour l'ordre. Tout ce qu'on peut dire alors résulte du théorème suivant, dû à E. Fabry (2) :

LEMME X. — *Si l'on a*

$$(1-|z|)^{\omega}|f(z)| < C, \qquad \omega \geq 0,$$

lorsque z tend vers un point quelconque de l'arc (α, β) *par des valeurs intérieures au cercle de convergence, la fonction* $f(z)$ *est, sur cet arc, d'ordre* $\omega + 1$ *au plus.*

En effet, ε étant positif, formons la dérivée d'ordre $-\omega-\varepsilon$

$$z^{-\omega-\varepsilon} D_z^{-\omega-\varepsilon} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\omega+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^{\omega+\varepsilon-1} f(tz)\, dt.$$

D'après l'énoncé, t étant inférieur à 1, on a

$$|f(tz)| < \frac{C}{(1-t)^{\omega}}$$

(1) *Leçons sur les séries à termes positifs*, Paris, 1902, p. 77-79.
(2) *Loc. cit.*

dans tout le secteur circulaire de (α, β); l'intégrale est donc uniformément convergente et représente une fonction finie et continue sur cet arc. Il en est de même *a fortiori* pour $z^{-\omega-\varepsilon-1}D_z^{-\omega-\varepsilon-1}f(z)$, qui, d'ailleurs, est holomorphe à l'intérieur de $|z|=1$, et a une dérivée finie sur l'arc (α, β). La dérivée de $f(z)$, d'ordre $-\omega-\varepsilon-1$ est donc à écart fini sur cet arc, et par suite, d'ordre non positif, et cela quelque petit que soit ε, ce qui démontre la proposition.

Ce théorème est d'application plus facile que le précédent, et bien qu'il soit moins précis, on ne peut arriver à mieux avec l'hypothèse faite sur $f(z)$. C'est ce qu'on peut voir, par exemple, sur la fonction de Weierstrass (1)

$$f(z) = 1 + bz^{\nu} + b^2 z^{\nu^2} + b^3 z^{\nu^3} + \ldots,$$

où $0 < b < 1$ et où ν est un entier supérieur à $\frac{1}{b}$. Son cercle de convergence $|z|=1$ est une coupure, et elle est d'ailleurs absolument et uniformément convergente, donc finie et continue sur ce cercle [mais non à écart fini (2)]. D'après notre lemme, elle est, par conséquent, d'ordre 1 au plus sur son cercle de convergence; or, d'autre part, la formule (1) en donne la valeur précise

$$\omega = 1 + \frac{\log b}{\log \nu},$$

qui est effectivement inférieure à 1, mais en est aussi voisine que l'on veut.

D'ailleurs, il est bon de remarquer que l'ordre sur le cercle de convergence ne tient compte que des valeurs absolues des coefficients, tandis que leurs arguments interviennent dans l'ordre d'infinitude aux points singuliers de ce cercle.

A cet égard, on a le théorème suivant de G.-H. Hardy (3) :

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est telle que*

$$(1-|z|)^{\omega}|f(z)| < C, \qquad \omega > 0, \tag{5}$$

(1) *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*, Berlin, 1886, p. 97-101, et *Mathematische Werke*, t. II, p. 71-74.

(2) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 170.

(3) *Loc. cit.*

lorsque z tend vers un point quelconque de son cercle de convergence $|z|=1$, par valeurs intérieures à ce cercle, la fonction

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,z^n$$

est telle que, lorsque z tend vers 1 suivant le rayon,

$$(1-z)^{\omega+\frac{1}{2}}|g(z)|<C.$$

Ce théorème est encore aussi précis que possible, et l'on ne peut remplacer $\omega+\frac{1}{2}$ par un exposant plus petit. C'est ce que démontre G.-H. Hardy par l'exemple (1)

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\omega-\frac{1}{2}}e^{n^2\pi i\xi}z^n \qquad 0<\omega<\frac{1}{2},$$

dans lequel le nombre ξ peut être choisi de façon que $f(z)$ satisfasse à l'inégalité (5), tandis que l'on a

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|)^{\omega+\frac{1}{2}}g(|z|)=\Gamma\left(\omega+\frac{1}{2}\right).$$

Il résulte donc de tout cela que le degré d'infinitude de la fonction aux points singuliers ne permet pas, à lui seul, de déterminer l'ordre sur le cercle de convergence. Cependant, en resserrant les hypothèses, on peut obtenir ce résultat assez précis :

Lemme XI. — *Si $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z|=1$, et si (α,β) est un arc de ce cercle comprenant le point $z=1$, et tel que l'on ait*

$$|f(z)(1-|z|)^{\omega}(1-z)|<C, \qquad \omega\geq 0,$$

dans le secteur circulaire de (α,β), l'ordre de $f(z)$ sur cet arc est $\omega+1$ au plus.

En particulier, si $z=1$ est le seul point singulier de (α,β), et si

$$|f(z)(1-z)^{\omega+1}|<C. \qquad \omega\geq 0,$$

(1) *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XLV, 1914, p. 79.

quand z tend vers 1 *sans sortir du cercle, l'ordre de* $f(z)$ *en ce point est* $\leq \omega + 1$.

Il suffit de démontrer que la dérivée d'ordre $-\omega - 1 - \varepsilon$ est finie, continue et à écart fini sur l'arc (α, β), quelque petit que soit le nombre positif ε. Les deux premières propriétés sont évidentes sur son expression

$$D_z^{-\omega-1-\varepsilon} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\omega+1+\varepsilon)} \int_0^z (z-\zeta)^{\omega+\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Formons l'écart

$$I = \frac{n}{\Gamma(\omega+1+\varepsilon)} \int_0^{\gamma} e^{in\theta} \int_0^{e^{i\theta}} (e^{i\theta}-\zeta)^{\omega+\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta\, d\theta,$$

γ étant un nombre quelconque de l'intervalle (α, β), et intégrons par parties, il vient

$$I = I_1(\gamma) - I_1(0) - \frac{1}{\Gamma(\omega+\varepsilon)} \int_0^{\gamma} e^{i(n+1)\theta} \int_0^{e^{i\theta}} (e^{i\theta}-\zeta)^{\omega+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta\, d\theta,$$

où

$$I_1(\gamma) = \frac{e^{in\gamma}}{i\Gamma(\omega+1+\varepsilon)} \int_0^{e^{i\gamma}} (e^{i\gamma}-\zeta)^{\omega+\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Par un changement de variable, on a de suite

$$|I_1(\gamma)| \leq \frac{1}{\Gamma(\omega+1+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^{\omega+\varepsilon} |f(te^{i\gamma})|\, dt$$
$$< \frac{C}{\Gamma(\omega+1+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^{\varepsilon} \frac{dt}{|1-te^{i\gamma}|},$$

et cette dernière intégrale est évidemment finie et indépendante de n, quel que soit γ entre α et β; donc $I_1(\gamma)$ et $I_1(0)$ sont finies. Quant à l'intégrale double I_2, elle donne

$$|I_2| < \frac{1}{\Gamma(\omega+\varepsilon)} \int_0^{\gamma} \int_0^1 (1-t)^{\omega+\varepsilon-1} |f(te^{i\theta})|\, dt\, d\theta$$
$$< \frac{C}{\Gamma(\omega+\varepsilon)} \int_0^{\gamma} \int_0^1 (1-t)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \frac{dt}{|1-te^{i\theta}|^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\, d\theta,$$

et cette intégrale est bien convergente quel que soit γ.

Il est clair que le théorème reste vrai s'il y a sur (α, β) un nombre fini de points singuliers de la même nature que $z = 1$.

26. Les théorèmes précédents permettent dans des cas étendus, sinon de déterminer l'ordre, du moins de lui assigner des bornes supérieure et inférieure. Mais il y a un cas particulier important où l'ordre se détermine exactement, à savoir lorsque $f(z)$ se comporte sur le cercle de convergence $|z| = 1$ comme une solution d'une équation différentielle linéaire à points singuliers réguliers.

Supposons donc que $f(z)$ admette, au voisinage de $z = 1$, une représentation de la forme

$$f(z) = \sum_{i=1}^{p} (1-z)^{\alpha_i} \{ \psi_{i,0}(z) + \psi_{i,1}(z) \log(1-z) + \ldots + \psi_{i,r_i}(z) \log^{r_i}(1-z) \},$$

les $\psi_{i,s}(z)$ étant holomorphes en ce point, avec tous les

$$\psi_{i,r_i}(1) \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sont des nombres complexes quelconques avec, par exemple,

$$\mathcal{R}(\alpha_1) \leqq \mathcal{R}(\alpha_2) \leqq \mathcal{R}(\alpha_3) \leqq \ldots.$$

Il suffit d'étudier un terme $(1-z)^{\alpha} \log^r(1-z)$. Si α est entier $\geqq 0$, avec $r = 0$, son ordre au point $z = 1$ est égal à $-\infty$; mais dans tous les autres cas, c'est $-\mathcal{R}(\alpha)$.

Tout d'abord, si $\mathcal{R}(\alpha+1) \leqq 0$, l'ordre est $\leqq -\mathcal{R}(\alpha)$ d'après le lemme XI, et $\geqq -\mathcal{R}(\alpha)$ d'après le lemme VIII. Si $\mathcal{R}(\alpha+1) > 0$, on se ramène au cas précédent en considérant une dérivée d'ordre entier $n > \mathcal{R}(\alpha+1)$.

Si l'on revient alors à $f(z)$, il suffit de remarquer que le produit par une fonction holomorphe et non nulle $\psi_{i,s}(z)$ ne change pas l'ordre, donc l'ordre de $f(z)$ au point $z = 1$ est $-\mathcal{R}(\alpha_1)$, à moins que α_1 ne soit entier non négatif, avec $r_1 = 0$; sinon c'est $-\mathcal{R}(\alpha_2)$, etc. Si $z = 1$ est le seul point singulier sur le cercle de convergence, cet ordre est également l'ordre sur le cercle.

27. Dans les lemmes V et VI, on supposait essentiellement l'ordre positif. Examinons maintenant le cas où l'ordre est négatif, et admettons d'abord que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} n^{\omega+1} a_n = 0, \qquad 0 < \omega < 1. \tag{6}$$

La série $\Sigma a_n z^n$ est uniformément convergente sur le cercle $|z| = 1$,

donc $f(z)$ est finie et continue sur ce cercle. Mais on ne peut affirmer qu'elle y admet une dérivée. Nous allons voir que, pour tout point α de la circonférence, la fraction

$$\frac{f(\alpha)-f(z)}{(\alpha-z)^{\omega}},$$

ou une valeur moyenne de cette fraction, tend vers zéro, suivant que z tend vers α sur un arc non tangent ou sur le cercle.

Il suffit de le démontrer pour $\alpha = 1$. Posons

$$\sigma_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots,$$

(6) est équivalent à

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{n^{\omega+1}} \qquad \text{pour} \qquad n \geqq n_0;$$

pour ces valeurs de n, on a donc

$$|\sigma_{n+1}| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| < \varepsilon \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\omega+1}} < \frac{\varepsilon}{\omega\, n^{\omega}},$$

d'où résulte

$$\lim_{n\to\infty} n^{\omega}\sigma_{n+1} = 0. \tag{7}$$

Cela posé, appliquons la transformation d'Abel à notre série; il vient

$$\sum_{n=0}^{n=m} a_n z^n = \sigma_0 + \sum_{n=0}^{n=m-1} \sigma_{n+1}(z^{n+1} - z^n) - \sigma_{m+1} z^m,$$

et, par suite, lorsque m augmente indéfiniment, si $|z| \leqq 1$,

$$f(z) - f(1) = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1} z^n.$$

Mais, d'après (7), on peut appliquer le lemme VI à la dernière série, ce qui démontre la première partie de notre proposition. Pour démontrer la deuxième partie, posons

$$\frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\omega}} = \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

On sait aisément exprimer les b_n en fonction des a_n,

$$(8)\qquad b_n = -\sigma_{n+1}\binom{\omega+n-1}{n} + \sum_{m=1}^{m=n} a_m\left[-\binom{\omega+n-1}{n}+\binom{\omega+n-m-1}{n-m}\right];$$

nous allons en déduire

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

En effet, d'après (7), $n\sigma_{n+1}\binom{\omega+n-1}{n}$ tend vers zéro. D'autre part,

$$\binom{\omega+n-m-1}{n-m}-\binom{\omega+n-1}{n} < \binom{\omega+n-m-1}{n-m}$$
$$= \frac{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n-m-1)(n-m)(n-m+1)\ldots(n-1)}{n!}$$
$$= \frac{m}{n}\binom{\omega+n-m-1}{n-m},$$

donc, le dernier terme de (8) est, en valeur absolue,

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{m=n} |ma_m|\binom{\omega+n-m-1}{n-m}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{m=n_0-1} |ma_m|\binom{\omega+n-m-1}{n-m}+\frac{\varepsilon}{n}\sum_{m=n_0}^{m=n-1}\frac{1}{m^\omega}\binom{\omega+n-m-1}{n-m}+\frac{\varepsilon}{n^{1+\omega}}$$
$$\frac{n_0 C}{n^{2-\omega}}+\frac{\varepsilon}{n^{1+\omega}}+\frac{\varepsilon C}{n}\sum_{m=1}^{m=n-1}\frac{1}{m^\omega}(n-m)^{\omega-1}.$$

La dernière somme reste finie, d'après

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{m=n-1}\frac{(n-m)^{\omega-1}}{m^\omega} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{m=n-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{\omega-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{-\omega}\frac{1}{n}$$
$$= \int_0^1 (1-x)^{\omega-1}x^{-\omega}\,dx = \frac{\pi}{\sin\pi\omega},$$

et d'après $0<\omega<1$; la relation (9) se vérifie ainsi immédiatement.

Enfin, puisque la première partie de ce théorème nous apprend que $\Sigma b_n z^n$ a une limite quand z tend vers 1 sur le rayon, il résulte,

d'un théorème connu de Tauber (1), que la série Σb_n converge et a une somme nulle.

$\Sigma b_n z^n$ converge même partout sur le cercle de convergence, puisqu'elle tend vers une limite quand z s'en approche sur un rayon quelconque, mais nous ne pouvons affirmer qu'elle converge uniformément sur ce cercle.

28. En utilisant un théorème plus profond dû à Littlewood, on arrive à un résultat semblable avec l'hypothèse, plus générale que (6),

$$\lim_{n\to\infty} n^{\omega+1} a_n = A, \qquad 0 < \omega < 1, \tag{10}$$

A étant une constante quelconque. D'après le théorème de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}},$$

(10) entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{\sum_{\nu=n}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu^{\omega+1}}} = A,$$

et puisque

$$\lim_{n\to\infty} n^{\omega} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\omega+1}} = \frac{1}{\omega},$$

on a ici

$$\lim_{n\to\infty} n^{\omega} \sigma_n = \frac{A}{\omega}.$$

Mais alors, on peut appliquer le lemme VI à

$$\varphi(z) = -(1-z)^{1-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1} z^n,$$

ce qui donne, sur un arc non tangent,

$$\lim_{z\to 1} \varphi(z) = -\frac{A}{\omega} \Gamma(1-\omega) = A\Gamma(-\omega).$$

Le raisonnement du paragraphe précédent montre alors que

$$|nb_n| < C,$$

quel que soit n, et le théorème en question de Littlewood (2)

(1) *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, t. VIII, 1897, p. 273-277.
(2) *Proc. London math. Soc.*, 2e série, t. IX, 1910, p. 438.

permet d'en déduire que Σb_n converge et a la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = A\Gamma(-\omega).$$

On voit, comme plus haut, que $\Sigma b_n z^n$ converge en tout point du cercle, et un théorème de Hardy et Littlewood (¹) permet d'en conclure que

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{1-z}\int_z^1 \varphi(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

sur une courbe régulière quelconque intérieure au cercle $|z|=1$, ou le long de ce cercle.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

LEMME XII. — *Étant donnée la série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *où*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\omega+1} a_n = A, \qquad 0<\omega<1, \tag{10}$$

on peut mettre sa somme $f(z)$ *sous la forme*

$$f(z) = f(1) + (1-z)^{\omega}\varphi(z),$$

avec

$$\lim_{z\to 1}\varphi(z) = A\Gamma(-\omega)$$

sur une courbe non tangente, tandis que

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{1-z}\int_z^1 \varphi(t)\,dt = A\Gamma(-\omega)$$

sur le cercle $|z|=1$ *ou sur une courbe régulière intérieure à ce cercle.*

Si $p<\omega<p+1$, p étant entier positif, la condition (10) permet d'écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=p}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n + (1-z)^{\omega}\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ tendant vers $A\Gamma(-\omega)$ lorsque z tend vers 1 par valeurs intérieures au cercle. Pour le voir, il suffit d'appliquer ce lemme à la dérivée $f^{(p)}(z)$, en tenant compte de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p-1}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n + \frac{1}{(p-1)!}\int_1^z f^{(p)}(t)(z-t)^{p-1}\,dt.$$

(¹) *Proc. London math. Soc.*, 2ᵉ série, t. XVIII, 1917, p. 210, Théorème I.

CHAPITRE IV.

L'INTÉGRALE DE LAPLACE ET LA SÉRIE DE STIRLING.

I. — Deux transformations de séries.

29. Ces préliminaires posés, nous allons démontrer qu'à toute série d'interpolation de Stirling appartient une intégrale du type de celle introduite par Laplace dans son calcul des probabilités, et qui est de nature à élucider certaines propriétés de la fonction $F(z)$. Nous commencerons par établir deux transformations qui permettent de passer d'une série procédant suivant les puissances décroissantes de t à une série procédant suivant les puissances décroissantes de $t-1$ ou de $t-\frac{1}{t}$.

La première de ces transformations a été indiquée par Euler. Admettons que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^{n+1}}$$

converge pour $|t|>R$, et posons $t=1+x$. En développant chaque terme suivant les puissances décroissantes de x, il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^{s+n} \binom{s}{n} x^{-s-1}.$$

La série au second membre converge *a fortiori* pour $|x|>R+1$. Le théorème de Weierstrass sur les séries doubles permet alors d'échanger l'ordre des sommations, et d'ordonner suivant les puissances décroissantes de x, pourvu que $|x|>R+1$, ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s+n} \binom{n}{s} F(s).$$

Mais la dernière somme est $\overset{n}{\Delta}F(0)$, et par suite

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\Delta}F(0)}{(t-1)^{n+1}};$$

la série au second membre converge toujours pour $|t-1| > R+1$ mais il arrive qu'elle converge dans un domaine plus étendu (1).

30. La seconde transformation que nous avons en vue s'établit d'une manière semblable. Soit, pour fixer les idées, $F(z)$ une fonction représentable par la série d'interpolation de Stirling. Considérons la fonction génératrice définie par la série

$$(2) \qquad f_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) - F(-n)}{t^{2n}}.$$

D'après le paragraphe 15, nous savons que, pour les valeurs positives de z,

$$|F(z) - F(-z)| < (1+\sqrt{2})^{2z} \sqrt{z}\,\varepsilon(z),$$

$\varepsilon(z)$ désignant une fonction qui tend vers zéro quand z augmente indéfiniment. La série (2) converge donc à l'extérieur du cercle $|t| = 1+\sqrt{2}$, et elle sera en général divergente à l'intérieur. Or dans ce qui suit, il nous importe de considérer $f_1(t)$ dans un domaine où la série (2) diverge. Pour démontrer que cette fonction admet un prolongement analytique dans ce domaine, nous allons transformer la série (2) en une série procédant suivant les puissances décroissantes de $t - \frac{1}{t}$, et les coefficients de cette nouvelle série seront précisément les coefficients qui entrent dans la série de Stirling.

n étant un entier positif, la fonction t^{-2n} peut se développer suivant les puissances décroissantes de $t - \frac{1}{t}$. La série de Lagrange en donne les deux développements remarquables suivants, qui se

(1) Cette transformation d'Euler a été rigoureusement établie pour la première fois par Poncelet.

vérifient d'ailleurs aisément par la formule du binome,

$$(3)\qquad \frac{1}{t^{2n}} = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{n}{s} \binom{2s}{s+n} \frac{(-1)^{s+n}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2s}},$$

$$(4)\qquad \frac{1}{t^{2n}} = \left(t+\frac{1}{t}\right) \sum_{s=n}^{\infty} \binom{2s}{s+n} \frac{(-1)^{s+n}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2s+1}}.$$

Ces deux séries convergent dans le domaine

$$\left| \frac{2}{t-\frac{1}{t}} \right| < 1,$$

c'est-à-dire dans la région du plan extérieure aux deux cercles $|t \pm 1| = \sqrt{2}$, ou commune à ces deux cercles. Dans le premier domaine, les séries représentent les fonctions aux premiers membres. Dans l'autre, la série (3) représente la fonction t^{2n}, et la série (4) la fonction $-t^{2n}$, comme on le voit en remplaçant t par $\frac{1}{t}$. Cela posé, admettons que $|t| > 1 + \sqrt{2}$. En substituant à $\frac{1}{t^{2n}}$ son développement (3), et en échangeant l'ordre des sommations, comme le permet le théorème de Weierstrass sur les séries doubles, la série (2) devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) - F(-n)}{t^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \frac{s}{n} \binom{2n}{s+n} [F(s) - F(-s)].$$

Mais

$$\overset{n-1}{\triangle} F(-n) = \sum_{s=0}^{2n-1} (-1)^{s-1} \binom{2n-1}{s} F(s-n),$$

et, par conséquent,

$$2\nabla \overset{2n-1}{\triangle} F(-n) = \sum_{s=0}^{2n} (-1)^{s} \binom{2n}{s} \frac{s-n}{n} F(s-n)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \binom{2n}{s+n} \frac{s}{n} [F(s) - F(-s)].$$

On aura donc

$$(5)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)-F(-n)}{t^{2n}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nabla^{2n-1}\Delta F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}.$$

En substituant le développement (4), on trouvera de même

$$(5')\qquad F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)+F(-n)}{t^{2n}}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n\ 0}^{\infty}\frac{\Delta^{2n}F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}.$$

La série de Stirling étant par hypothèse convergente, son terme général tend vers zéro, c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty}\frac{\nabla^{2n-1}\Delta F(-n)}{2^{2n}n^{\frac{1}{2}}}=0,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Delta^{2n}F(-n)}{2^{2n}n^{\frac{3}{2}}}=0;$$

on en conclut que les deux séries des seconds membres de (5) et (5') convergent si $\left|t-\frac{1}{t}\right|>2$, donc, en particulier, dans le domaine extérieur aux deux cercles $\left|t-\frac{1}{t}\right|=2$; et, dans ce domaine, elles donnent le prolongement analytique des fonctions définies aux premiers membres. Ces séries convergent encore dans le domaine commun aux deux cercles, mais rien ne nous permet d'affirmer qu'elles y représentent la même fonction qu'à l'extérieur.

II. — Représentations diverses de la série de Stirling par l'intégrale de Laplace.

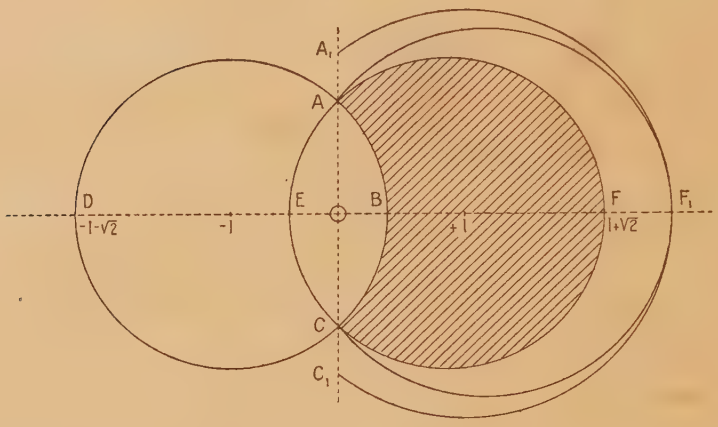
31. Nous avons déjà vu que la fonction t^{2z} peut se développer en série de Stirling dans le domaine intérieur au contour ABCFA, et hachuré sur la figure 6, et nous avons donné les deux déve-

loppements auxquels elle donne lieu

$$(6)\qquad t^{2z}+t^{-2z}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n},$$

$$(6')\qquad t^{2z}-t^{-2z}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{(2n+1)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}.$$

Fig. 6.



Le premier montre que la fonction $\dfrac{t^{2z}+t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}$, considérée comme fonction de $t-\frac{1}{t}$, admet un pôle d'ordre $2n+1$ au point $t-\frac{1}{t}=0$, avec le résidu $\dfrac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!}$, et l'on a

$$(7)\qquad \frac{1}{4\pi i}\int\frac{t^{2z}+t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}d\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!},$$

l'intégrale étant prise le long d'un petit cercle, entourant $t=1$, et parcouru dans le sens positif. Par une déformation continue, on peut substituer à ce chemin le contour ABCFA; et, comme les deux arcs de cercle de ce contour se correspondent par la transformation de t en $\frac{1}{t}$, qui n'altère pas la fonction sous le signe d'intégration, notre intégrale peut se remplacer par

$$(8)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{CFA}}\frac{t^{2z}+t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}=\frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!},$$

$$n\geq 0.$$

Du développement (6'), on déduirait de même

$$(8') \qquad \frac{1}{\pi i}\int_{\mathrm{CFA}} \frac{t^{2z}-t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}\frac{dt}{t} = \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!}, \qquad n>0.$$

32. Ces relations vont nous fournir une expression intégrale des fonctions qui se représentent par une série de Stirling. On y arrive le plus aisément en reprenant les deux combinaisons $F(z)\pm F(-z)$. Considérons d'abord

$$F(z)-F(-z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(2n+1)!}\nabla^{2n+1}\Delta F(-n-1)$$

$$(9) \qquad = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(n!)^2},$$

où

$$\alpha_n = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\nabla^{2n+1}\Delta F(-n-1).$$

Si la série (9) converge pour une valeur non entière de z, nous savons qu'elle converge uniformément dans tout domaine fini. La dérivation par rapport à z fournit donc une série convergente, et cette série se réduit, pour $z=0$, à

$$F'(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n.$$

La convergence de la série de Stirling entraîne donc la convergence de la série $\Sigma\alpha_n$. Considérons alors la fonction

$$G_1(z) = \frac{F(z)-F(-z)}{2z};$$

elle est paire, et telle que $G_1(0)=F'(0)$; la série (9) en donne le développement

$$G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\frac{(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(n!)^2},$$

qui, par la transformation d'Abel, s'écrit encore

$$(10) \qquad G_1(z) = G_1(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)\sum_{\nu=n}^{\infty}\alpha_\nu.$$

Ce développement va nous conduire à des séries uniformément convergentes, ce qu'on ne pouvait réaliser directement avec $F(z)$. Considérons, en effet, la fonction impaire

$$(11) \qquad H_1(z) = \frac{G_1(z) - G_1(0)}{z} = \frac{F(z) - F(-z) - 2zF'(0)}{2z^2};$$

l'équation (10) exprime qu'elle admet un développement de Stirling

$$H_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} z(z^2-1^2)\dots(z^2-(n-1)^2) \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu,$$

qui, d'après (28), paragraphe 6, peut encore s'écrire

$$(12) \qquad H_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{(2n+1)!} \nabla^{2n+1}\Delta H_1(-n-1),$$

et l'identification des coefficients conduit aux identités

$$\nabla^{2n-1}\Delta H_1(-n) = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu;$$

la convergence de $\Sigma\alpha_\nu$ permet donc de poser

$$(13) \qquad \nabla^{2n-1}\Delta H_1(-n) = \frac{2^{2n}\varepsilon(n)}{n^{\frac{3}{2}}},$$

où $\varepsilon(n)$ désigne une fonction qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Mais alors la série

$$(14) \qquad \varphi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nabla^{2n-1}\Delta H_1(-n)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n}}$$

est absolument et uniformément convergente sur les circonférences de cercle $\left|t - \frac{1}{t}\right| = 2$. En intégrant terme à terme, compte tenu de la formule (8′), on obtient

$$(15) \qquad H_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{CFA} (t^{2z} - t^{-2z}) \varphi_1(t) \frac{dt}{t},$$

et cette intégrale converge quel que soit z.

On peut également donner une expression intégrale de $G_1(z)$; l'équation (10) est un développement de cette fonction en série de Stirling, qui, identifié avec le développement général d'une fonction paire,

$$(16) \qquad G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \overset{2n}{\triangle} G_1(-n),$$

donne

$$(17) \qquad \overset{2n}{\triangle} G_1(-n) = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu = \frac{2^{2n}\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}.$$

De la dernière expression, il résulte que la série

$$(18) \qquad g_1(t) = \left(t+\frac{1}{t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{2n}{\triangle} G_1(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}$$

converge pour $\left|t-\frac{1}{t}\right| > 2$; mais, en général, cette série ne sera pas convergente sur la circonférence des deux cercles, de sorte que nous ne pouvons utiliser la même ligne d'intégration que précédemment.

Soit alors CF_1A un arc de cercle réunissant les points $-i$ et $+i$, assujetti seulement à avoir son centre sur l'axe réel, à droite du point $t=1$ (*fig.* 6). En vertu du lemme VII, la série (18) converge uniformément sur cet arc de cercle; on pourra donc intégrer terme à terme le long de ce cercle, et, compte tenu de (8), on trouvera

$$(19) \qquad G_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{CF_1A} (t^{2z}+t^{-2z})\, g_1(t) \frac{dt}{t}.$$

Les transformations (5') et (5), appliquées aux séries (18) et (14), permettent de donner, de $g_1(t)$ et $\varphi_1(t)$, les nouveaux développements

$$(20) \qquad g_1(t) = G_1(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_1(n)}{t^{2n}},$$

$$(21) \qquad \varphi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_1(n)}{t^{2n}}.$$

Mais on ne peut affirmer que ces deux séries convergent que

si $|t|>1+\sqrt{2}$. En dérivant l'équation (21) par rapport à t, on vérifie que

$$\varphi_1'(t)=-\frac{g_1(t)}{t}+G_1(0)\frac{t^2+1}{t(t^2-1)},$$

et cette relation permet d'appliquer à (15) l'intégration par partie; on retrouve ainsi l'équation (19).

Le lemme VI, appliqué à la série (18), montre que la fonction $g_1(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $\pm i$, le long de l'arc CF_1A; on peut donc intégrer (19) par partie, et l'on trouve ainsi

$$F(z)-F(-z)=\frac{1}{\pi i}\int_{CF_1A}(t^{2z}-t^{-2z})f_1(t)\frac{dt}{t}, \tag{22}$$

où

$$f_1(t)=-\frac{t}{2}g_1'(t),$$

ou encore, d'après (20),

$$f_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)-F(-n)}{t^{2n}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nabla^{2n-1}\Delta F(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}. \tag{23}$$

Par un raisonnement semblable, on démontrerait la formule

$$F(z)+F(-z)-2F(0)=\frac{z}{\pi i}\int_{CF_1A}(t^{2z}-t^{-2z})f_2(t)\frac{dt}{t}, \tag{22'}$$

où

$$f_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)+F(-n)-2F(0)}{nt^{2n}}. \tag{23'}$$

Pour déterminer l'ordre de grandeur de la fonction $f_1(t)$ lorsque t tend vers $\pm i$, nous nous servirons de l'équation (18), mise sous la forme

$$f_1(t)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^{2n}G_1(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}}+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\Delta^{2n}G_1(-n)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+2}}.$$

Il suffit d'appliquer le lemme VI à ces deux séries, en utilisant (17), pour vérifier que

$$\lim_{t\to\pm i}(t^2+1)f_1(t)=0,$$

quand on s'approche de A ou C sur la ligne d'intégration. On démontrerait de même que, sous la même condition,

$$\lim_{t \to \pm i} (t^2+1) f_2(t) = 0. \tag{24}$$

Cette propriété de la fonction $f_2(t)$ va nous permettre encore une fois d'intégrer par partie dans l'équation (22′); en effet, on peut considérer le second membre comme la limite de la même intégrale, mais étendue à l'arc $C_1 F_1 A_1$ d'un cercle, dont le centre est un point fixe de l'axe réel, situé à droite du point $+1$, et joignant les points A_1 et C_1 d'affixes $\pm i(1+\varepsilon)$, ε désignant un nombre positif que nous ferons tendre ensuite vers zéro.

Pour une valeur fixe de ε, on peut intégrer par partie; les termes tout intégrés disparaissent, en vertu de (24) et de la parité de $f_2(t)$, de sorte qu'à la limite, on trouve

$$F(z) + F(-z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{C_1 F_1 A_1} (t^{2z} + t^{-2z}) f(t) \frac{dt}{t}, \tag{25}$$

où

$$f(t) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) + F(-n)}{t^{2n}} \tag{26}$$

$$= \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{2n}{\triangle} F(-n)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n+1}}. \tag{26′}$$

Remarquons que notre raisonnement ne nous permet pas d'affirmer que l'intégrale existe pour $\varepsilon = 0$, mais seulement que l'intégrale principale du second membre de (25) converge. Enfin, la méthode que nous avons déjà appliquée à $f_1(t)$ et $f_2(t)$ montrerait que

$$\lim_{t \to \pm i} (t^2+1)^2 f(t) = 0, \tag{27}$$

quand t tend vers $\pm i$ le long de la ligne d'intégration.

Appliquons ceci, par exemple, à la fonction

$$F(z) = \cos \pi z;$$

l'équation (26) définit

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

qui, porté dans (25), donne

$$\cos\pi z = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1F_1A_1}(t^{2z}+t^{-2z})\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t},$$

tandis que (22′) donnerait

$$\frac{\cos\pi z - 1}{z} = \frac{1}{\pi i}\int_{CFA}(t^{2z}-t^{-2z})\log\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}.$$

III. — La série de Bessel.

33. On peut reprendre tous ces calculs en partant du développement (29) du paragraphe 6. Les deux séries auxquelles conduit la fonction particulière t^{2z} deviennent ici

$$(28)\qquad t^{2z}+t^{-2z} = \left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2n)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n},$$

$$(28')\qquad t^{2z}-t^{-2z} = 2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2n+1)!}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1},$$

d'où l'on déduit

$$(29)\qquad \frac{1}{\pi i}\int_{CFA}\frac{t^{2z}+t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}}\frac{dt}{t} = \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2n)!},$$

$$(29')\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{CFA}\frac{t^{2z}-t^{-2z}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+2}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} = \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2n+1)!}.$$

Le même raisonnement que ci-dessus conduit alors, pour toute fonction $F(z)$ représentable par la série de Bessel, aux expressions intégrales des deux sommes $F(z)+F(-z)$ et $F(z)-F(-z)$. Mais ici, c'est la première somme qui s'exprime par une intégrale

convergente

$$F(z)+F(-z)=\frac{1}{\pi i}\int_{CF_1A}(t^{2z}+t^{-2z})\,f_1(t)\,\frac{dt}{t},$$

où

$$f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F\left(n+\frac{1}{2}\right)+F\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{t^{2n+1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nabla^{2n}\Delta F\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n+1}},$$

et satisfait, comme plus haut, à la relation

$$\lim_{t\to\pm i}(t^2+1)\,f_1(t)=0;$$

tandis que l'autre somme s'exprime seulement par une intégrale principale

$$F(z)-F(-z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{C_1F_1A_1}(t^{2z}-t^{-2z})\,f(t)\,\frac{dt}{t},$$

où

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F\left(n+\frac{1}{2}\right)-F\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{t^{2n+1}}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2n-1}F\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^{2n}},$$

avec

$$\lim_{t\to\pm i}(t^2+1)^2\,f(t)=0.$$

IV. — Exemples.

34. La fonction hypergéométrique fournit quelques exemples remarquables de séries d'interpolation, d'autant plus intéressantes qu'elles peuvent être rendues aussi lentement convergentes que l'on veut. Ces exemples sont de nature à élucider les rapports entre les propriétés de la série de Stirling, et l'ordre de grandeur de la fonction $F(z)$ pour les valeurs très grandes de z, ainsi que l'ordre de la fonction génératrice $f(t)$ quand on s'approche de l'arc de cercle CFA.

Considérons d'abord la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, où l'on a posé

$$x=1, \qquad \alpha=z, \qquad \beta=-z.$$

Son développement est alors une série de Stirling

$$(30)\quad F(z)=\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(\gamma-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

qui converge absolument quel que soit z, si $\mathcal{R}(\gamma) > 0$, mais diverge si $\mathcal{R}(\gamma) \leq 0$, et dans laquelle le paramètre γ permet de s'approcher indéfiniment de la limite de convergence. Des propriétés asymptotiques de la fonction Γ, résulte, lorsque z s'éloigne indéfiniment,

$$F(z) \sim C z^{1-2\gamma} \sin \pi(z-\gamma),$$

de sorte qu'en prenant le nombre positif γ suffisamment petit, l'ordre de grandeur de notre fonction $F(z)$ pourra, dans l'angle $\frac{\pi}{4} < v < \frac{3\pi}{4}$, s'approcher, autant qu'on veut, du maximum que lui impose, dans cet angle, l'inégalité

$$|F(re^{iv})| < C e^{\pi r \sin v} r^{\varepsilon(r)}.$$

Le second membre de (30) fournit les quantités

$$F(n) = F(-n) = \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

qui, substituées dans l'équation (26), donnent, pour la fonction $f(t)$, l'expression

$$f(t) = -1 + 2F\left(1, 1-\gamma, \gamma; -\frac{1}{t^2}\right). \tag{31}$$

D'autre part, l'équation (25) se réduit ici à

$$\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma-z)\Gamma(\gamma+z)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 F_1 A_1} (t^{2z} + t^{-2z}) f(t) \frac{dt}{t}. \tag{32}$$

La branche principale de $f(t)$ admet comme points singuliers les seuls points $t = 0$ et $t = \pm i$, et les propriétés connues de la série hypergéométrique permettent aisément de voir comment elle se comporte au voisinage de ces points. Par exemple, au voisinage de $t = +i$, on aura

$$F\left(1, 1-\gamma, \gamma; -\frac{1}{t^2}\right) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(2-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} e^{-\pi i(\gamma-1)} \left(t + \frac{1}{t}\right)^{2\gamma-2} + \frac{1}{2} F\left(1, 1-\gamma, 3-2\gamma; 1+\frac{i}{t^2}\right); \tag{33}$$

donc, en ce point, la fonction $f(t)$ devient infinie avec un ordre qui tend vers l'ordre maximum, lorsque γ tend vers zéro.

On peut d'ailleurs donner une forme plus simple à l'inté-

grale (32). Admettons, pour un instant, que $\mathcal{R}(\gamma) > \frac{1}{2}$; dans ces conditions, on peut déformer la ligne d'intégration jusqu'au demi-cercle droit de diamètre AC; on aura donc

$$(32') \quad \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma-z)\Gamma(\gamma+z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i}^{+i}(t^{2z}+t^{-2z})f(t)\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1}^{i}(t^{2z}+t^{-2z})\left[f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dt}{t}.$$

Mais de l'équation (33), on peut déduire

$$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2},$$

$\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2}$ désignant la branche qui prend la valeur 1 au point $t=1$; de sorte que l'équation (32') se réduit à

$$(34) \quad \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma-z)\Gamma(\gamma+z)} = \frac{-i}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}\int_{1}^{i}(t^{2z}+t^{-2z})\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2}\frac{dt}{t}.$$

Nous avons supposé $\mathcal{R}(\gamma) > \frac{1}{2}$, alors que la série (30) converge sous la seule condition $\mathcal{R}(\gamma) > 0$; mais on peut aisément déduire

Fig. 7.

de (34) une intégrale curviligne qui représente notre fonction dans tout le domaine où la série converge. Soit $l_{1,i}$ un lacet, d'origine $t=1$, entourant le point $t=i$, et parcouru dans le sens positif.

De l'équation (34), on déduit

$$(35)\qquad \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma-z)\,\Gamma(\gamma+z)} = -\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)}{4\pi\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-2\pi i\gamma}}{\sin\pi\gamma} \times \int_{1,i}(t^{2z}+t^{-2z})\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^{2\gamma-2}\frac{dt}{t},$$

et cette relation est valable dans tout le domaine $\mathcal{R}(\gamma) > 0$, en exceptant les valeurs de la forme $\gamma = \frac{1+p}{2}$, où p est un entier positif.

Pour $\gamma = \frac{1}{2}$, on aura

$$(36)\qquad \cos\pi z = \frac{1}{2\pi}\int_{1,i}(t^{2z}+t^{-2z})\frac{dt}{t^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\,z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2).$$

Pour $\gamma = 1$, (34) devient

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z} = \frac{1}{\pi i}\int_1^i (t^{2z}+t^{-2z})\frac{dt}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(n!)^2}.$$

35. La série (30) représente une fonction dont l'ordre de grandeur, lorsque γ tend vers zéro, se rapproche de son maximum sur tout rayon vecteur intérieur à l'angle $\frac{\pi}{4} < v < \frac{3\pi}{4}$. Nous allons rencontrer maintenant une fonction dont l'ordre de grandeur peut s'approcher du maximum, mais sur un seul rayon vecteur intérieur à l'angle $-\frac{\pi}{4} < v < \frac{\pi}{4}$. C'est la série hypergéométrique qui va, ici encore, nous fournir un exemple aussi simple que possible.

Soit a l'affixe d'un point de l'arc de cercle CFA, autre que C et A, et considérons la série de Stirling

$$(37)\qquad F(z) = F\left(z, -z, \gamma; -\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2}\right)^{2n}.$$

D'après $\left| a - \frac{1}{a} \right| = 2$, cette série converge absolument, quel que soit z, si $\mathcal{R}(\gamma) > 0$; elle converge simplement si $-1 < \mathcal{R}(\gamma) \leq 0$, et elle diverge si $\mathcal{R}(\gamma) \leq -1$. Il faut évidemment excepter la valeur $\gamma = 0$.

En substituant cette valeur de $F(z)$ dans l'équation (25), on trouvera

$$(38) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{CF_1A} (t^{2z} + t^{-2z}) F\left(1, \frac{1}{2}, \gamma; \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2}\right) \frac{t + \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} \frac{dt}{t}.$$

La fonction génératrice se représente donc, elle aussi, par une série hypergéométrique, et l'on voit qu'elle admet les seuls points singuliers $0, \pm a, \pm \frac{1}{a}$. D'ailleurs, à l'aide des propriétés connues de la série hypergéométrique, on peut donner à $f(t)$, au voisinage des quatre derniers points, une expression de la forme

$$(39) \quad f(t) = \frac{t + \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} F\left(1, \frac{1}{2}, \gamma; \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2}\right)$$

$$= C\left[1 - \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma - \frac{3}{2}} \left(t + \frac{1}{t}\right) + \psi(t),$$

$\psi(t)$ étant holomorphe au voisinage du point en question.

On voit par là que la fonction génératrice $f(t)$ qui appartient à une série de Stirling peut devenir infinie d'ordre $\frac{5}{2} - \varepsilon$, en un point, et, par conséquent, en une infinité de points de l'arc de cercle CFA.

On peut modifier (38) en remarquant que la valeur de l'intégrale est nulle si on l'étend au demi-cercle droit de diamètre CA, ce qu'on vérifie immédiatement par le changement de t en $\frac{1}{t}$. Par conséquent, on ne change pas le second membre de (38) en intégrant le long du contour formé par ce demi-cercle et CF_1A; et ce contour fermé est équivalent au lacet $l_{1,a}$, d'origine 1, et entourant le point a dans le sens positif. $\psi(t)$ étant holomorphe

à l'intérieur du lacet, son intégrale est nulle, et il reste

$$(40)\qquad F(z)=-\frac{e^{-\pi i\gamma}}{2\pi}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)}{\sqrt{\pi}}\int_{l_{1,a}}(t^{2z}+t^{-2z})\times\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\frac{t+\frac{1}{t}}{a-\frac{1}{a}}\frac{dt}{t},$$

où il faut supposer γ différent des nombres $0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$.

Si $\mathcal{R}(\gamma)>\frac{1}{2}$, on peut remplacer cette intégrale curviligne par l'intégrale définie

$$(41)\qquad F(z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}\int_1^a(t^{2z}+t^{-2z})\times\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}}\frac{t+\frac{1}{t}}{a-\frac{1}{a}}\frac{dt}{t},$$

et cette formule reste valable pour $\gamma=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$. Elle subsiste même si $a=\pm i$, bien qu'il n'en soit pas ainsi pour (40).

Par exemple, pour $\gamma=\frac{1}{2}$, (40) donnera

$$(42)\qquad a^{2z}+a^{-2z}=\frac{a-\frac{1}{a}}{\pi i}\int_{l_{1,a}}(t^{2z}+t^{-2z})\frac{(t^2+1)\,dt}{(t^2-a^2)\left(t^2-\frac{1}{a^2}\right)}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n}.$$

Ces relations particulières ont été déduites des relations générales, valables pour une série de Stirling quelconque, mais il va sans dire qu'on peut les obtenir plus directement. C'est ainsi qu'on retrouve la relation exprimée par (41) en y substituant, à $t^{2z}+t^{-2z}$, son développement (42), et en effectuant l'intégration terme à terme.

Signalons encore l'expression à laquelle conduit cette autre série de Stirling

$$(43)\qquad F(z) = z\,F\left(1+z,\ 1-z,\ \gamma+1;\ -\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{n!\,(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n)} \left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2}\right)^{2n}.$$

Cette série converge absolument si $\mathcal{R}(\gamma) > 1$, simplement si $0 < \mathcal{R}(\gamma) \leqq 1$, et diverge si $\mathcal{R}(\gamma) \leqq 0$. Par un raisonnement semblable au précédent, on trouvera

$$(44)\qquad F(z) = C \int_{l_{1,a}} (t^{2z} - t^{-2z}) \left[1 - \frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}} \left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t},$$

où l'on suppose γ différent des nombres $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$; et où C désigne la quantité

$$C = -\frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-i\pi\gamma}}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^3}.$$

V. — Valeurs asymptotiques.

36. L'intégrale (40) va nous permettre de voir comment se comporte la fonction hypergéométrique pour les valeurs très grandes de z, et cette étude particulière nous conduira ensuite à l'expression asymptotique générale que nous nous proposons de déterminer dans ce Chapitre.

Posons $z = re^{i\nu}$, et admettons provisoirement que $\mathcal{R}(z)$ soit supérieur à un nombre positif α. Conservons à a sa signification et supposons $\mathcal{R}(\gamma) > -1$. Cela posé, développons la quantité à intégrer suivant les puissances croissantes de $a - t$; il vient

$$1 - \frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = (a-t)\,\frac{2(a^2+1)}{a(a^2-1)}\left[1 - (a-t)\,\frac{a^2+3}{2a(a^2-1)} + \dots\right],$$

et, par suite,

$$(45)\qquad \frac{t+\frac{1}{t}}{a-\frac{1}{a}}\left[1-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\right]^{\gamma-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}\left[\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}\right]^{\gamma-\frac{1}{2}}\left[1+\left(1-\frac{t}{a}\right)\psi(t)\right],$$

où $\left[\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}\right]^{\gamma-\frac{1}{2}}$ représente la branche qui prend la valeur

$$e^{\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\log(2\sqrt{2})}$$

au point $a=1+\sqrt{2}$, et où $\psi(t)$ désigne une fonction sans autre point singulier que $t=\frac{1}{a}$, $-a$, $-\frac{1}{a}$, 0, ∞. Nous sommes ainsi conduits à former

$$\int_{l_{1,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt = \int_{l_{0,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt-(1+e^{2\pi i\gamma})\int_0^1 t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt,$$

et la dernière intégrale est bornée d'après la condition $\mathcal{R}(z)>0$. D'autre part, on vérifie immédiatement, par le changement de variable $t=au$, que

$$\int_{l_{0,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt = a^{2z}(1+e^{2\pi i\gamma})\frac{\Gamma(2z)\,\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2z+\gamma-\frac{1}{2}\right)},$$

ce qui donne en définitive

$$(46)\qquad \int_{l_{1,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}dt = a^{2z}\frac{\Gamma(2z)\,\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2z+\gamma-\frac{1}{2}\right)}(1+e^{2\pi i\gamma})+O(1)\ (1).$$

---

(1) Suivant une notation courante, $\psi(u)$ étant une fonction positive de u, $O[\psi(u)]$ désigne une fonction $f(u)$ telle que $\left|\frac{f(u)}{\psi(u)}\right|$ reste borné lorsque u augmente indéfiniment. $f(u)=o[\psi(u)]$ exprime que ce même rapport tend vers zéro lorsque u augmente indéfiniment.

On démontrerait de même

$$(46') \quad \int_{l_{1,a}} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}} dt = a^{-2z}\,\frac{\Gamma\left(2z-\gamma+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z+1)}\,e^{\pm\pi i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}(1+e^{2\pi i\gamma})+O(1),$$

où c'est le signe + ou — qui convient suivant que a est au-dessus ou au-dessous de l'axe réel.

Pour terminer l'examen de (40), il nous reste donc à considérer l'intégrale

$$P=\int_{l_{1,a}}(t^{2z}+t^{-2z})\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\psi(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Or, au voisinage de $t=a$, $\psi(t)$ admet le développement

$$\psi(t)=\psi(a)+\left(1-\frac{t}{a}\right)\psi_1(t),$$

$\psi_1(t)$ étant elle-même holomorphe en ce point; on aura donc

$$(47) \quad P=\psi(a)\int_{l_{1,a}}(t^{2z}+t^{-2z})\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\frac{dt}{t} + \int_{l_{1,a}}(t^{2z}+t^{-2z})\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}\psi_1(t)\,\frac{dt}{t}.$$

La première intégrale se décompose en deux termes de même forme que (46) et (46'), et tous deux infiniment petits par rapport à ceux-ci. Pour déterminer l'ordre de grandeur de la dernière intégrale, il suffit d'effectuer la transformation

$$\int_{l_{0,a}} t^{2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}\psi_1(t)\,dt = a^{2z}(1+e^{2\pi i\gamma})\int_0^1 t^{2z-1}(1-t)^{\gamma+\frac{1}{2}}\psi_1(at)\,dt,$$

et cette dernière intégrale est infiniment petite par rapport à la première intégrale de (47), car il existe un nombre positif β tel que

$$|t^{\beta}\psi_1(at)|<C, \qquad 0<t<1.$$

On verrait de même que l'on peut négliger

$$\int_{l_\infty, a} t^{-2z-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}\psi_1(t)\,dt,$$

et l'on obtient en définitive, pour valeur asymptotique de $F(z)$,

$$(48)\quad F(z)=F\left(z,-z,\gamma;-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(a^{2z}z^{\frac{1}{2}-\gamma}+a^{-2z}(-z)^{\frac{1}{2}-\gamma}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right].$$

Cette expression, établie par O. Perron, pour les valeurs positives de z [1], a été obtenue ici en supposant $\mathcal{R}(z)>\alpha>0$; mais $F(z)$ étant une fonction paire de z, cette équation subsiste si $\mathcal{R}(z)<-\alpha$. Nous avons également admis que a est différent de $\pm i$, et l'on peut vérifier effectivement que (48) cesse d'être vraie lorsque a vient en l'un de ces points; on a, en effet,

$$F(z)=F(z,-z,\gamma;1)=\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+z)\Gamma(\gamma-z)}$$
$$=-\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\pi}z^{1-2\gamma}\sin\pi(z-\gamma)\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right].$$

De l'intégrale (44), on déduirait de même la relation asymptotique suivante :

$$(49)\quad F(z)=zF\left(1+z,1-z,\gamma+1;-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$
$$=\frac{2\Gamma(\gamma+1)}{\sqrt{\pi}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)}\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(a^{2z}z^{\frac{1}{2}-\gamma}-a^{-2z}(-z)^{\frac{1}{2}-\gamma}\right)$$
$$\times\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

où l'on suppose $\mathcal{R}(\gamma)>0$ et $a\neq\pm i$.

Remarquons encore que, dans ce qui précède, on supposait a sur l'arc de cercle CFA; mais il résulte du changement de a en $\frac{1}{a}$ que les relations (48) et (49) subsistent lorsque a est sur l'arc ABC.

---

[1] *Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg*, A, I, 1917, p. 68.

VI. — Nouvelle détermination d'une expression majorante pour $F(z)$.

37. Nous allons maintenant utiliser ces résultats pour déterminer une expression majorante pour la somme d'une série de Stirling. Nous avons vu que cette somme $F(z)$ se représente par les intégrales (22) et (25), mais ces deux intégrales ne se prêtent pas à cette recherche; c'est pourquoi nous commencerons par étudier la fonction $H_1(z)$, définie par l'expression (12).

Puisque

$$\int_{\mathrm{CFA}} (t^{2z} - t^{-2z}) \frac{dt}{t} = 0,$$

on ne change pas la valeur de l'intégrale (15) en retranchant de $\varphi_1(t)$ une constante arbitraire, et l'on peut écrire

$$H_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathrm{CFA}} (t^{2z} - t^{-2z}) [\varphi_1(t) - \varphi_1(\pm i)] \frac{dt}{t}. \tag{15'}$$

Ceci posé, reprenons la transformation

$$t = \xi + \sqrt{\xi^2 + 1},$$

déjà utilisée au paragraphe 18, où $\sqrt{\xi^2+1} = \sqrt{2}$ pour $\xi = 1$; en conservant la notation $\xi = e^{2i\theta}$, il suffit de faire varier θ de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$ pour que t décrive l'arc CFA, et l'on a

$$\frac{dt}{t} = \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = \frac{2i\, e^{i\theta}\, d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}.$$

En posant $\varphi_1(t) = \psi(\theta)$, l'intégrale (15') devient donc

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (t^{2z} - t^{-2z}) \left[\psi(\theta) - \psi\left(\pm \frac{\pi}{4}\right)\right] \frac{e^{i\theta}\, d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}, \tag{50}$$

où, en vertu de (14),

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nabla^{2n-1} \Delta H_1(-n)}{2^{2n}} e^{-2in\theta}. \tag{51}$$

C'est de cette intégrale que nous allons déduire l'ordre de grandeur de $H_1(z)$. Il nous faut donc étudier tout d'abord comment se

comporte t^{2z} pour les valeurs très grandes de z, lorsque t décrit l'arc CFA. Cette étude a été faite au paragraphe 18 pour la seule valeur absolue; ici, nous aurons également besoin de l'argument de t^{2z}, mais le calcul est le même.

En posant toujours $z = r e^{i\nu}$, et en désignant maintenant par $\lambda(\theta)$ la fonction $\lambda(\nu, \theta)$, on déduit facilement des formules (53) (§ 18)

$$t^{2z} = e^{r\lambda(\theta) + ir\mu(\theta)},$$

avec

$$(52)\quad \lambda(\theta) = \cos\nu \log\left(\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\right)^2 - 2\sin\nu \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right),$$

$$(53)\quad \mu(\theta) = \sin\nu \log\left(\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\right)^2 + 2\cos\nu \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right).$$

L'étude de $\lambda(\theta)$ ayant déjà été faite, nous ne rappelons ici que les résultats :

1° Si $\frac{\pi}{4} \leqq \nu < \frac{3\pi}{4}$, les inégalités (56) (§ 18) entraînent

$$(54)\quad |t^{z}| < e^{r(\pi\sin\nu - \varepsilon_1)} \qquad -\frac{\pi}{4} + \eta_1 < \theta \leqq \frac{\pi}{4},$$

$$(54')\quad |t^{-z}| < e^{r(\pi\sin\nu - \varepsilon_1)} \qquad -\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{4} - \eta_1,$$

et ces inégalités subsistent pour $\nu = \frac{3\pi}{4}$.

2° Si $-\frac{\pi}{4} < \nu < \frac{\pi}{4}$, on a

$$\lambda(\theta) \leqq \psi(\nu),$$

l'égalité n'ayant lieu que pour la seule valeur $\theta = -\nu$, et, au voisinage de cette valeur, les formules (57) (§ 18) nous donnent le développement

$$(55)\quad \lambda(\theta) = \psi(\nu) - \frac{\sqrt{2}(\theta+\nu)^2}{\sqrt{\cos 2\nu}} + \dots$$

Rappelons également que, pour $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$, on a

$$-\lambda(\theta) \leqq \pi\,|\sin\nu| < \psi(\nu),$$

et, par suite,

$$(56)\quad |t^{-z}| < e^{r(\psi(\nu) - \varepsilon_1)}.$$

Enfin, au voisinage des deux extrémités de l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$,

on pourra facilement former les développements suivants :

$$(57)\quad \lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)= \pi\sin\varphi-4\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

$$(57')\quad \lambda\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=-\pi\sin\varphi+4\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

$$(58)\quad \mu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\pi\cos\varphi+4\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

$$(58')\quad \mu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)= \pi\cos\varphi+4\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{3}{2}}+\ldots.$$

38. Ces préliminaires posés, passons à l'examen de l'intégrale (50), dans l'angle $\frac{\pi}{4}\leqq\varphi\leqq\frac{3\pi}{4}$, pour les très grandes valeurs de r. En mettant à part les deux intervalles où les inégalités (54) et (54′) ne s'appliquent pas, posons

$$(59)\quad P_1=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}+\eta} e^{2z}\left[\psi(\theta)-\psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}},$$

$$(59')\quad P_2=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}-\eta}^{\frac{\pi}{4}} e^{-2z}\left[\psi(\theta)-\psi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}.$$

$H_1(z)$ admet alors la décomposition

$$(60)\quad H_1(z)=P_1-P_2+O\left[e^{r(\pi\sin\varphi-\varepsilon_1)}\right],$$

de sorte qu'il suffira d'étudier P_1 et P_2, d'ordres supérieurs au dernier terme.

Il résulte de (13), d'après le lemme XII, que

$$\psi(\theta)-\psi\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{e^{-4i\theta}+1}\,f(\theta)=e^{-i\theta}\sqrt{2\cos 2\theta}\,f(\theta),$$

où la série

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-4in\theta}$$

converge pour toutes les valeurs de θ. Nos deux intégrales

admettent donc les expressions

$$(61)\qquad P_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}+\eta} t^{2z} f(\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{r\nu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} f\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) d\theta,$$

$$(61')\qquad P_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}-\eta}^{\frac{\pi}{4}} t^{-2z} f(\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{-r\nu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} f\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) d\theta,$$

où, pour abréger, nous posons momentanément

$$\lambda(\theta) + i\mu(\theta) = \nu(\theta).$$

En intégrant par partie, P_1 devient d'abord

$$P_1 = \frac{2}{\pi} e^{r\nu\left(\eta-\frac{\pi}{4}\right)} \int_0^{\eta} f\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) d\theta$$
$$- \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{r\nu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} r\nu'\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\theta} f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx\, d\theta.$$

Mais, du lemme XII, résulte

$$\lim_{\theta \succ 0} \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx = 0;$$

de ce fait, ainsi que des développements (57), (58), on conclut que, ε étant un nombre positif, on peut trouver un nombre positif η tel que $0 < \theta < \eta$ entraîne les inégalités

$$\left|\int_0^{\theta} f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx\right| < \varepsilon\theta,$$
$$\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) < \pi\sin\varphi - 4\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\theta^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\nu'\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right| < \frac{C}{\sqrt{\theta}},$$

ce qui permet d'écrire

$$|P_1| < O\left[e^{r(\pi\sin\varphi-\varepsilon_1)}\right] + Ce^{r\pi\sin\varphi} r\int_0^{\eta} e^{-4r\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)} \theta^{\frac{1}{2}}\, d\theta.$$

Il suit de là que, si φ est assujetti à la condition

$$\frac{\pi}{4} + \eta_1 \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4},$$

η_1 étant positif, on a

$$r\int_0^{\eta} e^{-\frac{1}{2}r\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\,\theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{1}{r^2}\int_0^{\eta r^2} e^{-\frac{1}{2}\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\,\theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta < \frac{C}{r^2},$$

et, par conséquent,

$$|P_1| = \frac{e^{r\pi\sin\nu}\,\varepsilon_1(r)}{r^2}, \tag{62}$$

où $\varepsilon_1(r)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{r}$ dans l'angle

$$\frac{\pi}{4}+\eta_1 \leq \nu \leq \frac{3\pi}{4}.$$

L'intégrale (61′) donnerait de même

$$|P_2| < O\left[e^{r(\pi\sin\nu-\varepsilon_1)}\right] + C\varepsilon\, e^{r\pi\sin\nu}\, r\int_0^{\eta} e^{-\frac{1}{2}r\theta^{\frac{1}{2}}\sin\left(\nu+\frac{\pi}{4}\right)}\,\theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

et, par suite,

$$|P_2| = \frac{e^{r\pi\sin\nu}\,\varepsilon_2(r)}{r^2}, \tag{62′}$$

$\varepsilon_2(r)$ tendant uniformément vers zéro avec $\frac{1}{r}$ dans l'angle

$$\frac{\pi}{4} \leq \nu \leq \frac{3\pi}{4}-\eta_1.$$

L'équation (60) conduit donc à la relation

$$|H_1(re^{i\nu})| = \frac{e^{r\pi\sin\nu}}{r^2}\,\varepsilon(r), \tag{63}$$

$\varepsilon(r)$ tendant uniformément vers zéro avec $\frac{1}{r}$ dans l'angle

$$\frac{\pi}{4}+\eta_1 \leq \nu \leq \frac{3\pi}{4}-\eta_1.$$

39. Nous avons été obligés de laisser de côté les voisinages immédiats des deux extrémités, pour lesquels le raisonnement précédent ne conduit pas à une inégalité suffisamment précise. Examinons-les maintenant.

Supposons, par exemple, $\frac{\pi}{4} \leq \nu \leq \frac{3\pi}{4}-\eta_1$; (62′) subsiste, mais il nous faut reprendre l'étude de P_1. L'intégrale (59) peut s'écrire

$$P_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+ir\mu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\psi\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\,d\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}},$$

et l'intégration par parties, où l'on met en évidence

$$(64)' \quad \psi_1(\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} e^{4ir\sqrt{\theta}\sin\left(\rho+\frac{\pi}{4}\right)}\left[\psi\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]d\theta,$$

donne une expression de la forme

$$(65) \qquad P_1 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + O\left[e^{r(\pi\sin\rho-\varepsilon_1)}\right],$$

où

$$Q_1 = -r\int_0^{\eta} e^{r\rho(\theta)}\psi_1(\theta)\,\rho'(\theta)\frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\,d\theta,$$

$$Q_2 = \int_0^{\eta} e^{r\rho(\theta)}\psi_1(\theta)\frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\cot 2\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\,d\theta,$$

$$Q_3 = -i\int_0^{\eta} e^{r\rho(\theta)}\psi_1(\theta)\frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\,d\theta,$$

et où l'on a posé

$$\rho(\theta) = \lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) + i\mu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) - 4i\sqrt{\theta}\sin\left(\rho+\frac{\pi}{4}\right).$$

Mais les développements (57) et (58) donnent

$$\rho'(\theta) = -\frac{2\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\theta}} + O\left(\sqrt{\theta}\right),$$

et l'on trouve alors les inégalités

$$(66) \quad |Q_1| < r\int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}|\psi_1(\theta)|\left[\frac{2\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}{\theta}+O(1)\right]d\theta,$$

$$(66') \quad |Q_2| < \int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}|\psi_1(\theta)|\frac{d\theta}{\theta^{\frac{3}{2}}},$$

$$(66'') \quad |Q_3| < \int_0^{\eta} e^{r\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}|\psi_1(\theta)|\frac{d\theta}{\theta^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous sommes ainsi conduits à étudier comment se comporte $\psi_1(\theta)$ pour les très grandes valeurs de r. Cette étude, ainsi que celle de

l'intégrale analogue qui se présente pour P_2, résultera d'un lemme qui va faire l'objet des deux paragraphes suivants.

40. Considérons une série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dont les coefficients sont tels que

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{3}{2}} a_n = 0.$$

Nous avons vu au paragraphe 27 que, si l'on pose

$$f(z) = f(1) + (1 - z)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

on a

$$\lim_{n \to \infty} n b_n = 0;$$

et la série $\Sigma b_n z^n$ converge sur le cercle $|z| = 1$.

Nous allons démontrer maintenant l'inégalité suivante :

$$\left| \int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}} [f(e^{i\theta}) - f(1)] \, d\theta \right| = \frac{\theta}{r} o\left[\log\left(1 + \frac{r}{\sqrt{\theta}}\right) \right]. \tag{67}$$

L'intégrale du premier membre s'écrit

$$M = \int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}} [f(e^{i\theta}) - f(1)] \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n, \tag{68}$$

avec

$$T_n = \int_0^{} e^{ir\sqrt{\theta} + in\theta} (1 - e^{i\theta})^{\frac{1}{2}} \, d\theta,$$

et l'on voit aisément comment se comporte T_n lorsque r et n sont très grands. En effet, si l'on pose $\theta = x^2$,

$$T_n = 2 e^{-i\frac{r^2}{4n}} \int_0^{\sqrt{\theta}} e^{in\left(x + \frac{r}{2n}\right)^2} (1 - e^{ix^2})^{\frac{1}{2}} x \, dx,$$

et, en intégrant par parties, il vient

$$\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\,x\,dx$$
$$=-\frac{i\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}\,e^{in\left(\sqrt{\theta}+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{i\theta})^{\frac{1}{2}}$$
$$+i\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}(1-e^{ix^2})^{\frac{1}{2}}\frac{r\,dx}{(2nx+r)^2}$$
$$+\int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{e^{in\left(x+\frac{r}{2n}\right)^2}}{2nx+r}(1-e^{ix^2})^{-\frac{1}{2}}e^{ix^2}x^2\,dx.$$

Il en résulte immédiatement

$$|T_n|<\frac{2\theta}{2n\sqrt{\theta}+r}+\int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{4x\,dx}{2nx+r},$$

ou encore, d'après l'inégalité

$$\int_0^{\sqrt{\theta}}\frac{x\,dx}{2nx+r}<\sqrt{\theta}\,\frac{\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}=\frac{\theta}{2n\sqrt{\theta}+r},$$
$$|T_n|<\frac{C\theta}{2n\sqrt{\theta}+r}.$$

Ce résultat, porté dans (68), donne alors

$$|M|<C\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{2n\sqrt{\theta}+r}=\frac{C\theta}{r}\sum_{n=1}^{\infty}|n\,b_n|\left(\frac{1}{n}-\frac{2\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}\right),$$

et, comme à tout nombre positif ε, correspond un nombre n_0 tel que

$$|n\,b_n|<\varepsilon,\qquad n\geq n_0,$$

on aura

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|n\,b_n|\left(\frac{1}{n}-\frac{2\sqrt{\theta}}{2n\sqrt{\theta}+r}\right)<\varepsilon\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{r}{2\sqrt{\theta}}}\right)$$
$$<\varepsilon\left[\log\left(n_0+\frac{r}{2\sqrt{\theta}}\right)-\log(n_0-1)\right],$$

ce qui démontre l'inégalité (67).

41. Considérons, en second lieu,

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

avec la même condition

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{3}{2}} a_n = 0,$$

et examinons comment se comporte

$$M_1 = \int_0^{\theta} e^{ir\sqrt{\theta}} [f_1(e^{i\theta}) - f_1(1)]\, d\theta \tag{69}$$

pour les valeurs positives et très grandes de r. Pour cela, nous mettrons $f_1(z)$ sous la forme

$$f_1(z) - f_1(1) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{m} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, \tag{70}$$

m désignant un nombre positif quelconque. Nous savons que

$$\lim_{n \to \infty} n\, b_n = 0;$$

d'autre part, en identifiant les termes d'égale puissance dans les deux membres extrêmes, on peut exprimer les c_n en fonction des a_n et des b_n, et arriver à l'inégalité

$$|c_n| < \frac{\varepsilon \log m}{n\sqrt{n-m}},$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro quand m, et par conséquent n, augmentent indéfiniment. En portant le développement (70) dans l'intégrale (69), on peut alors démontrer l'inégalité

$$|M_1| < \frac{\theta}{r} \varepsilon_1(r) \log\left(1 + \frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right) + \frac{\theta^{\frac{3}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}} \varepsilon_2(r) \log\left(1 + \frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right), \tag{71}$$

ε_1 et ε_2 désignant des fonctions qui tendent vers zéro quand $\frac{r}{\sqrt{\theta}}$ augmente indéfiniment.

42. Après cette digression, reprenons l'étude de P_1, ou, ce qui

revient au même d'après (65), des intégrales Q_1, Q_2, Q_3. Nous avons supposé $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} - \eta_1$; admettons, en outre, que z soit situé dans le domaine défini par

$$r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \geq c, \tag{72}$$

c étant une certaine constante positive.

En remplaçant $|\psi_1(\theta)|$ par la limite supérieure qu'en donne (71), l'inégalité (66) devient

$$|Q_1| < e^{r\pi \sin\varphi}\varepsilon_1(r)\int_0^{\eta_1} e^{-4r\sqrt{\theta}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\left[2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\theta\,O(1)\right]\log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right)d\theta$$
$$+ e^{r\pi\sin\varphi}\frac{\varepsilon_2(r)}{\sqrt{r}}\int_0^{\eta_1} e^{-4r\sqrt{\theta}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\left[2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\theta\,O(1)\right]\log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right)\frac{d\theta}{0^{\frac{1}{4}}},$$

et l'on trouve alors, en tenant compte de (72),

$$|Q_1| < \frac{e^{r\pi\sin\varphi}\varepsilon(r)}{r^2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\log\left[1+r^2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

où

$$\lim_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0,$$

et cela uniformément dans le domaine en question.

On déduit de même, de (66'),

$$|Q_2| < \frac{e^{r\pi\sin\varphi}}{r}\int_0^{\eta} e^{-4r\sqrt{\theta}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\varepsilon_1(r)+\frac{\varepsilon_2(r)}{\sqrt{r}\,\theta^{\frac{1}{4}}}\right]\log\left(1+\frac{r}{4\sqrt{\theta}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}},$$

et, par suite,

$$|Q_2| < \frac{e^{r\pi\sin\varphi}\varepsilon(r)}{r^2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\log\left[1+r^2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

D'ailleurs, (66") montre que Q_3 vérifie la même inégalité. En portant ces limites supérieures de Q_1, Q_2, Q_3 dans (65), on obtient enfin

$$|P_1| < \frac{e^{r\pi\sin\varphi}\varepsilon_1(r)}{r^2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\log\left[1+r^2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{73}$$

$\varepsilon_1(r)$ désignant une fonction qui tend uniformément vers zéro, dans le domaine en question, lorsque r augmente indéfiniment.

43. Le problème que nous nous étions posé au début du paragraphe 37 n'est pas encore résolu pour P_1, car (72) écartait un domaine que nous devons étudier maintenant. Supposons donc z dans l'angle $\frac{\pi}{4} - \eta_1 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} + \eta_1$, et, en outre, dans le domaine

$$r^{\frac{2}{3}} \sin\left|\varphi - \frac{\pi}{4}\right| \leqq c. \tag{74}$$

Si η est assez petit, (57) donne, pour $0 < \theta < \eta_1$,

$$r\lambda\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < r\pi \sin\varphi - 4\theta^{\frac{1}{2}} r \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - r\theta^{\frac{3}{2}}$$
$$< r\pi \sin\varphi + 4cr^{\frac{1}{3}}\theta^{\frac{1}{2}} - r\theta^{\frac{3}{2}},$$

et l'on déduit, de l'inégalité (66),

$$|Q_1| < e^{r\pi\sin\varphi}(Q_{11} + Q_{12}),$$

où

$$Q_{11} = 2r\sin\left|\varphi - \frac{\pi}{4}\right| \int_0^{\eta r^{\frac{2}{3}}} e^{4c\theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}}} \left|\psi_1\left(\theta r^{-\frac{2}{3}}\right)\right| \frac{d\theta}{\theta},$$

$$Q_{12} = r^{\frac{1}{3}} O(1) \int_0^{\eta r^{\frac{2}{3}}} e^{4c\theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}}} \left|\psi_1\left(\theta r^{-\frac{2}{3}}\right)\right| d\theta.$$

De l'inégalité (66′), on peut déduire de même

$$|Q_2| < r^{\frac{1}{3}} e^{r\pi\sin\varphi} \int_0^{\eta r^{\frac{2}{3}}} e^{4c\theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}}} \left|\psi_1\left(\theta r^{-\frac{2}{3}}\right)\right| \frac{d\theta}{\theta^{\frac{3}{2}}}.$$

En portant dans ces intégrales la limite supérieure de $|\psi_1(\theta)|$ trouvée plus haut, on obtient alors, pour Q_1 et Q_2, la même limite supérieure

$$e^{r\pi\sin\varphi} r^{-\frac{4}{3}} \left[\varepsilon(r)\log\left(1 + r^{\frac{4}{3}}\right) + O\left(r^{-\frac{1}{3}}\right)\right].$$

On voit de suite, d'après (66″), que le terme Q_3 est d'ordre inférieur à Q_1 et Q_2, de sorte qu'il reste, pour P_1, l'inégalité

$$|P_1| < e^{r\pi\sin\varphi} r^{-\frac{4}{3}} \varepsilon_2(r) \log\left(1 + r^{\frac{4}{3}}\right), \tag{75}$$

où $\varepsilon_2(r)$ désigne une fonction qui tend vers zéro quand r augmente indéfiniment, et cela uniformément dans le domaine défini par (74).

Enfin on peut rassembler les trois inégalités (63), (73), (75) trouvées pour P_1, dans l'inégalité unique

$$(76) \qquad |P_1| < \frac{e^{r\pi\sin\rho}\,\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{4}{3}}\left(1 - r^{\frac{2}{3}}\cos 2\rho\right)}, \qquad \frac{\pi}{4} \leq \rho \leq \frac{3\pi}{4}.$$

44. Pour terminer l'étude de H_1 dans l'angle $\frac{\pi}{4} \leq \rho \leq \frac{3\pi}{4}$, il nous reste à voir comment se comporte l'intégrale

$$(77) \quad P_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta_1} e^{-r\lambda\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - ir\mu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\left[\psi\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \psi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\,d\theta}{\sqrt{2\sin 2\theta}},$$

dans l'intervalle $\frac{3\pi}{4} - \eta_1 \leq \rho \leq \frac{3\pi}{4}$ que nous avions laissé de côté lors de la démonstration de (62′).

Il suffit d'intégrer (77) par parties, en répétant le raisonnement précédent, avec cette seule différence que, au lieu de $\psi_1(\theta)$, nous introduisons ici la fonction

$$(64') \quad \psi_2(\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} e^{-4ir\sqrt{6}\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\psi\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \psi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]d\theta.$$

Le calcul est d'ailleurs plus aisé que pour P_1, car à cette intégrale ψ_2 s'applique l'inégalité (67), plus simple que (71); mais le résultat est le même, et l'on vérifie que P_2 satisfait à l'inégalité (76) dans l'intervalle envisagé. On en conclut que

$$(78) \qquad |H_1(re^{i\rho})| = \frac{e^{r\pi\sin\rho}\,\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{4}{3}}\left(1 - r^{\frac{2}{3}}\cos 2\rho\right)}, \qquad \frac{\pi}{4} \leq \rho \leq \frac{3\pi}{4},$$

$\varepsilon(r)$ désignant une fonction qui tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{r}$, dans l'angle en question.

Il résulte même, de la formule (63), qu'à l'intérieur de cet angle, c'est-à-dire pour $\frac{\pi}{4} + \eta_1 \leq \rho \leq \frac{3\pi}{4} - \eta_1$, on a

$$\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r)\log r = 0,$$

et il paraît probable que l'on pourrait arriver, par une analyse plus approfondie, à supprimer le facteur $\log r$ dans l'inégalité (78).

45. Ce qui précède nous permet également de conclure dans la

partie de l'angle $\frac{\pi}{4} - \eta_1 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, pour laquelle

$$r^{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \leq c.$$

Nous avons vu, en effet, que, dans ce domaine, P_1 vérifie l'inégalité (75); d'autre part, le raisonnement du paragraphe 38 montre que $|P_2|$ y est inférieure à $\frac{e^{r\pi \sin\varphi}}{r^2}\varepsilon_2(r)$, et, par suite, infiniment petite par rapport à P_1. Dans ces conditions on a donc, pour $H_1(z)$, l'inégalité

$$|H_1(re^{i\varphi})| < \frac{e^{r\pi\sin\varphi}\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{3}{4}}}. \tag{79}$$

L'intervalle $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$, qu'il nous reste à considérer, ne peut pas être étudié avec les intégrales précédentes; une étude approfondie montre qu'aucune d'entre elles ne conduit à une inégalité suffisamment précise, et c'est ce qui nous oblige à établir d'abord une nouvelle expression intégrale de notre fonction $H_1(z)$.

46. Considérons la fonction hypergéométrique

$$F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots(z^2-n^2)}{n!\,(n+1)!}\xi^{2n}, \tag{80}$$

cas particulier de celle envisagée déjà au paragraphe 35; elle est holomorphe au point $\xi = 0$, et n'admet pas d'autre point singulier, à distance finie, que les points $\xi = \pm i$. On a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2)\frac{d\xi}{\xi^{2n+1}} = \frac{(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots(z^2-n^2)}{n!\,(n+1)!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{81}$$

la ligne d'intégration étant un cercle de centre 0 et de rayon inférieur à 1, parcouru dans le sens positif. Mais, au voisinage de $\xi = \pm i$, notre fonction est de la forme

$$F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2) = \varphi_0(\xi)\log(1+\xi^2) + \varphi_1(\xi), \tag{82}$$

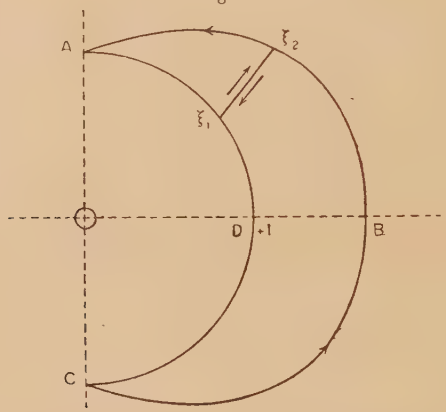
$\varphi_0(\xi)$ et $\varphi_1(\xi)$ étant holomorphes en ces points; on peut donc déformer la ligne d'intégration afin qu'elle passe par les points $\pm i$,

et comme, en outre, la fonction sous le signe d'intégration ne change pas par la transformation de ξ en $-\xi$, on pourra écrire

$$(83)\qquad \frac{1}{\pi i}\int_{-i}^{+i} F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2)\frac{d\xi}{\xi^{2n+1}} = \frac{(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots(z^2-n^2)}{n!\,(n+1)!},$$

l'intégrale étant prise le long d'un arc CBA enveloppant le demi-cercle CDA.

Fig. 8.



Ceci posé, nous avons vu, au paragraphe 32, que $H_1(z)$ peut se représenter par une série de la forme

$$H_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{(n!)^2} z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots(z^2-(n-1)^2),$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

La fonction

$$(84)\qquad \psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n}\xi^{-2n+1}$$

est donc holomorphe à l'extérieur du cercle $|\xi| = 1$, et telle que

$$\lim_{\xi\to\pm i} \frac{\psi(\xi)}{\log(1+\xi^2)} = 0,$$

lorsqu'on s'approche des points $\pm i$, le long de l'arc ABC. On peut alors multiplier les deux membres de (84) par

$$F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2),$$

et intégrer terme à terme le long de CBA, ce qui donne, en vertu de (83),

$$H_1(z) = \frac{z}{\pi i}\int_{-i}^{+i} F(1+z,\ 1-z,\ 2;\ -\xi^2)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{85}$$

C'est de cette intégrale, évidemment convergente quel que soit z, que nous allons déduire une expression majorante pour $H_1(z)$ dans l'angle $-\frac{\pi}{4}+\eta_1 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}-\eta_1$.

Soient ξ_1 un point de l'arc ADC, ξ_2 un point de ABC. On ne change pas (85) en ajoutant à la ligne d'intégration le chemin $\xi_2\xi_1\xi_2$, car l'intégrale $\int_{\xi_2}^{\xi_1}$ est convergente, d'après l'ordre logarithmique de $\psi(\xi)$ au point ξ_1. Posons maintenant

$$\psi_1(\xi) = \int_{i}^{\xi} \xi^{2\alpha-2}\psi(\xi)\,d\xi,$$

$$\psi_2(\xi) = \int_{-i}^{\xi} \xi^{2\alpha-2}\psi(\xi)\,d\xi,$$

$$u = \xi^{2-2\alpha} F(1+z,\ 1-z,\ 2;\ -\xi^2), \tag{86}$$

α étant un nombre positif que nous spécifierons par la suite, et intégrons (85) par parties. Il vient

$$H_1(z) = \frac{z}{\pi i}\,u(\xi_1)\,\psi_2(i) - \frac{z}{\pi i}\int_{\xi_1}^{i}\psi_1(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}\,d\xi - \frac{z}{\pi i}\int_{-i}^{\xi_1}\psi_2(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}\,d\xi, \tag{87}$$

car il résulte de (82) que

$$\lim_{\xi \to i} u(\xi)\,\psi_1(\xi) = 0,$$

$$\lim_{\xi \to -i} u(\xi)\,\psi_2(\xi) = 0,$$

lorsqu'on s'approche de ces points le long de la ligne d'intégration.

D'autre part, on déduit de (84)

$$\psi_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2n(\alpha-n)}\,(\xi^{2\alpha-2n} - (-1)^n e^{\pi i\alpha}), \tag{88}$$

$$\psi_2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2n(\alpha-n)}\,(\xi^{2\alpha-2n} - (-1)^n e^{-\pi i\alpha}), \tag{88'}$$

ces deux séries convergeant uniformément sur le cercle $|\xi| = 1$. Dans les deux intégrales du second membre de (87), on peut donc contracter la ligne d'intégration jusqu'aux deux arcs de cercle $CD\xi_1$ et $\xi_1 A$.

Pour voir comment se comporte $H_1(z)$, il nous faut donc étudier $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$, $u(\xi)$ sur l'arc ADC.

Tout d'abord, (88) et (88′) montrent que, si α est suffisamment grand, on a

$$|\psi_i(\xi)| < \frac{\varepsilon}{\alpha}\log\alpha, \qquad i = 1, 2. \tag{89}$$

D'autre part, en dérivant (86), on vérifie facilement que

$$\frac{du}{d\xi} = 2\xi^{1-2\alpha}\left[-\alpha F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2) + \frac{1}{1+\xi^2}F(z, -z, 1; -\xi^2)\right],$$

et si l'on se rappelle les relations démontrées au paragraphe 36

$$F(1+z, 1-z, 2; -\xi^2) = \frac{\xi^{-\frac{3}{2}}(1+\xi^2)^{-\frac{1}{4}}}{2z\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{2z}}{\sqrt{z}} - \frac{t^{-2z}}{\sqrt{-z}}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$F(z, -z, 1; -\xi^2) = \frac{\xi^{-\frac{1}{2}}(1+\xi^2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{2z}}{\sqrt{z}} + \frac{t^{-2z}}{\sqrt{-z}}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

où $t = \xi + \sqrt{1+\xi^2}$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\xi} = {} & \alpha\frac{t^{2z}}{z\sqrt{\pi z}}\,\xi^{-2\alpha}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}}\left(-\sqrt{\xi+\sqrt{1+\xi^2}} + \frac{z}{\alpha}\sqrt{\xi}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ & + \alpha\frac{t^{-2z}}{z\sqrt{-\pi z}}\,\xi^{-2\alpha}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}}\left(\sqrt{\xi+\sqrt{1+\xi^2}} + \frac{z}{\alpha}\sqrt{\xi}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right].\end{aligned} \tag{90}$$

Mais, d'après l'inégalité (56), il suffit de conserver le premier terme, d'ordre supérieur au second ; comme il résulte en outre, du paragraphe 37, que $\lambda(\theta)$ est maximum pour $\theta = -\varphi$, il suffit d'étudier notre intégrale au voisinage de cette valeur pour obtenir la partie principale de $H_1(z)$.

Soit alors l'intervalle $-\varphi - \eta_1 \leq \theta \leq -\varphi + \eta_1$; choisissons le point

$$\xi_1 = e^{2i\theta_1}$$

de façon que θ_1 soit extérieur à cet intervalle. L'équation (90) nous

donne

$$\left|\frac{du}{d\xi}\right| < \frac{\alpha}{r\sqrt{\pi r}} e^{r\lambda(\theta)} (2\cos 2\theta)^{-\frac{3}{4}} \left| -\sqrt{2\cos 2\theta} + \frac{r}{\alpha} e^{i(\theta+\rho)} \right| \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

et puisque $|\theta + \rho| \leqq \eta$, il est indiqué de choisir, pour le nombre positif α, la valeur

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\rho}}.$$

Dans ces conditions,

$$-\sqrt{2\cos 2\theta} + \frac{r}{\alpha} e^{i(\theta+\rho)} = \frac{2ie^{2i\rho}}{\sqrt{2\cos 2\rho}} (\theta + \rho) + O[(\theta + \rho)^2],$$

et, en prenant η suffisamment petit, on aura

$$\left| -\sqrt{2\cos 2\theta} + \frac{r}{\alpha} e^{i(\theta+\rho)} \right| < C \frac{|\theta + \rho|}{\sqrt{2\cos 2\rho}},$$

$$\lambda(\theta) < \psi(\rho) - \frac{(\theta + \rho)^2}{\sqrt{2\cos 2\rho}},$$

et, par suite,

$$\left|\frac{du}{d\xi}\right| < \frac{C}{\sqrt{r}} e^{r\psi(\rho) - \frac{r(\theta+\rho)^2}{\sqrt{2\cos 2\rho}}} |\theta + \rho|, \qquad |\theta + \rho| \leqq \eta.$$

Cette inégalité, jointe à (89) et aux remarques précédentes, permet de déduire, de (87),

$$|H_1(re^{i\rho})| < \frac{\varepsilon_1(r)\log r}{\sqrt{r}} e^{r\psi(\rho)} \int_{-\rho-\eta}^{-\rho+\eta} e^{-r\frac{(\theta+\rho)^2}{\sqrt{2\cos 2\rho}}} |\theta + \rho| d\theta + O[e^{r[\psi(\rho)-\varepsilon_2]}],$$

et, d'après l'inégalité évidente

$$\int_{-\rho-\eta}^{-\rho+\eta} e^{-r\frac{(\theta+\rho)^2}{\sqrt{2\cos 2\rho}}} |\theta + \rho| d\theta < \frac{C}{r},$$

nous avons ainsi démontré

$$(91) \qquad |H_1(re^{i\rho})| < \frac{e^{r\psi(\rho)}\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{3}{2}}}, \qquad -\frac{\pi}{4} + \eta_1 \leqq \rho \leqq \frac{\pi}{4} - \eta_1.$$

47. Pour compléter notre recherche, il nous resterait à consi-

dérer le domaine de l'angle $\frac{\pi}{4} - \eta_1 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, où

$$r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \leqq c.$$

Mais on peut raisonner, sur l'intégrale (85), comme nous l'avons fait, pour l'intégrale (15), dans les paragraphes 39 et 42, ce qui conduit, dans le domaine en question, à

$$|H_1(re^{i\varphi})| < \frac{e^{r\psi(\varphi)}\,\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{3}{2}}(\cos 2\varphi)^{\frac{1}{4}}}; \tag{92}$$

on peut encore rapprocher cette inégalité de (91) et (79), et écrire l'inégalité unique

$$|H_1(re^{i\varphi})| \ll \frac{e^{r\psi(\varphi)}\,\varepsilon(r)\log r}{r^{\frac{4}{3}}\left(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2\varphi\right)^{\frac{1}{4}}}, \tag{93}$$

$\varepsilon(r)$ désignant une fonction qui tend uniformément vers zéro lorsque z s'éloigne à l'infini dans l'angle indiqué.

En revenant enfin à $F(z)$, nous avons ainsi démontré que

$$|F(z) - F(-z)| < \frac{e^{r\psi(\varphi)}\,r^{\frac{2}{3}}\,\varepsilon(r)\log r}{(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2\varphi)^{\frac{1}{4}}}, \qquad -\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4},$$

$$|F(z) - F(-z)| < \frac{e^{r\psi(\varphi)}\,r^{\frac{2}{3}}\,\varepsilon(r)\log r}{1 - r^{\frac{2}{3}}\cos 2\varphi}, \qquad \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4};$$

et un raisonnement, en tous points analogue, nous conduirait, pour l'autre somme $F(z) + F(-z)$, aux inégalités

$$|F(z) + F(-z)| < \frac{e^{r\psi(\varphi)}\,r^{\frac{5}{3}}\,\varepsilon(r)\log r}{(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2\varphi)^{\frac{1}{4}}}, \qquad -\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4},$$

$$|F(z) + F(-z)| < \frac{e^{r\psi(\varphi)}\,r^{\frac{5}{3}}\,\varepsilon(r)\log r}{1 - r^{\frac{2}{3}}\cos 2\varphi}, \qquad \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4}.$$

CHAPITRE V.

LA SÉRIE D'INTERPOLATION DE NEWTON.

I. — Le domaine de convergence.

48. La série de Stirling est d'application restreinte. La série de Newton

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!}, \tag{1}$$

que nous étudions dans ce Chapitre, se prête au contraire à la représentation d'une classe beaucoup plus étendue de fonctions. C'est ainsi que toute fonction holomorphe à l'infini admet un développement de cette forme. Mais cette condition suffisante n'est nullement nécessaire; le développement subsiste pour une classe étendue de fonctions admettant le point à l'infini comme point singulier, et nous allons en préciser les conditions.

La série de Newton a fait l'objet d'un grand nombre de travaux; parmi les plus récents, nous signalerons particulièrement ceux de S. Pincherle [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], I. Bendixson [1, 2], E. Landau [1], F. Carlson [1, 2], G. Pólya et S. Szegö [1]. Elle est souvent dénommée série de facultés de seconde espèce ou série de coefficients binomiaux, mais puisque c'est la formule d'interpolation de Newton qui lui donne naissance, nous préférons le nom adopté dans ce livre, et qui figure dans les traités élémentaires sur l'interpolation.

E. Landau [1] a fait ressortir que la série de Newton présente une analogie remarquable avec la série de Dirichlet et avec la série de facultés. Les ressemblances entre ces trois séries sont assez profondes, et les différences le sont peut-être davantage, mais le lecteur trouvera intérêt à rapprocher les résultats de ce Chapitre

de ceux qui ont été obtenus pour la série de Dirichlet (¹), notamment par G.-H. Hardy et H. Bohr.

49. Étant donnée une telle série (1), dont les coefficients a_s sont indépendants de z, elle se réduit à un nombre fini de termes pour toute valeur entière et positive de la variable, et l'on ne peut évidemment tirer des conclusions qu'en la supposant convergente en un point différent $z_0 = \sigma_0 + i\tau_0$. A un tel point, associons le secteur $\mathfrak{D}_0$ défini par les inégalités $0 \leqq r \leqq R$, $-\frac{\pi}{2} + \eta_1 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} - \eta_1$, où l'on a posé $z = z_0 + re^{i\varphi}$, et où η_1 est un nombre positif arbitrairement petit. Cela posé, on peut énoncer les deux théorèmes suivants, dont le premier n'est d'ailleurs qu'un corollaire du second.

THÉORÈMES. — *Si la série* (1) *converge pour* $z = z_0$:

I (²). *Elle converge en tout point situé à droite de* $\mathcal{R}(z) = \sigma_0$.

II (³). *Elle converge uniformément dans le secteur* $\mathfrak{D}_0$.

Soient

$$b_s = (-1)^s a_s \frac{(z_0 - 1)(z_0 - 2)\dots(z_0 - s)}{s!},$$

$$c_s = \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{(z_0 - 1)(z_0 - 2)\dots(z_0 - s)}. \qquad (4)$$

Il nous faut démontrer qu'à tout nombre positif ε correspond un entier positif n_0, tel que, en tout point du secteur $\mathfrak{D}_0$, on ait

$$\left| \sum_{s=n}^{s=m} b_s c_s \right| < \varepsilon, \qquad \text{si} \qquad m \geqq n \geqq n_0.$$

Or, par la transformation d'Abel, on peut écrire

$$(2) \qquad \sum_{s=n}^{s=m} b_s c_s = \sum_{s=n}^{s=m-1} (c_s - c_{s+1}) \sum_{\nu=n}^{\nu=s} b_\nu + c_m \sum_{\nu=n}^{\nu=m} b_\nu,$$

(¹) La théorie des séries de Dirichlet a été magistralement exposée par G.-H. Hardy et Marcel Riesz : *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge, 1915. On consultera aussi l'article de H. Bohr et H. Cramér dans l'*Encyklopädie der math. Wiss.*, II, C 8, p. 722-759.

(²) Jensen [2], Bendixson [2].

(³) Bendixson [2] démontre que la série converge uniformément dans tout domaine fini situé tout entier à l'intérieur du domaine de convergence.

avec

$$c_s - c_{s+1} = c_s \frac{z - z_0}{s + 1 - z_0}.$$

D'autre part, il est clair que, si s est supérieur à un nombre suffisamment grand s_0, on a

$$|\arg(s - z_0)| < \frac{1}{2}\eta, \tag{3}$$

et le segment qui joint s à z_0 est vu de tous les points de $\mathcal{D}_0$ sous un angle supérieur à $\frac{\pi}{2} + \frac{\eta}{2}$; dans ces conditions, en écrivant que ce segment est plus grand que sa projection sur la droite qui passe par z et s, on trouvera

$$|s - z| < |s - z_0| - r \sin\frac{\eta}{2}, \tag{4}$$

quel que soit z dans le secteur $\mathcal{D}_0$. (3) entraîne

$$|s - z_0| < \frac{s - \sigma_0}{\cos\frac{\eta}{2}},$$

et l'on déduit alors de (4)

$$\left|\frac{s - z}{s - z_0}\right| < 1 - \frac{r \sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2}}{s - \sigma_0} = \frac{s - \sigma_0 - \frac{r}{2}\sin\eta}{s - \sigma_0};$$

en outre

$$\left|\frac{z - z_0}{s + 1 - z_0}\right| \leqq \frac{r}{s + 1 - \sigma_0},$$

et l'on peut écrire

$$|c_s - c_{s+1}| < \left|\frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s_0+1)}{(z_0-1)(z_0-2)\dots(z_0-s_0+1)}\right| d_s \frac{r}{s+1-\sigma_0}, \quad s \geqq s_0, \tag{5}$$

où

$$d_s = \frac{\left(s_0 - \sigma_0 - \frac{1}{2} r \sin\eta\right)\dots\left(s - \sigma_0 - \frac{1}{2} r \sin\eta\right)}{(s_0 - \sigma_0)(s_0 + 1 - \sigma_0)\dots(s - \sigma_0)}.$$

Le premier facteur du second membre de (5) reste borné dans tout le secteur $\mathcal{D}_0$, et, d'autre part,

$$d_s \frac{r}{s + 1 - \sigma_0} = (d_s - d_{s+1}) \frac{2}{\sin\eta};$$

il résulte donc de (5) que

$$|c_s - c_{s+1}| < \frac{2C}{\sin\eta_1}(d_s - d_{s+1}).$$

Cela posé, soit ε un nombre positif. Puisque, par hypothèse, la série Σb_s est convergente, nous pouvons choisir n_0 tel que

$$\left|\sum_{s=n}^{s=m} b_s\right| < \frac{\varepsilon}{2C}\sin\eta_1, \qquad \text{si} \qquad m \geqq n \geqq n_0.$$

En prenant $n_0 \geqq s_0$, on aura donc

$$\left|\sum_{s=n}^{s=m} b_s c_s\right| < \varepsilon \sum_{s=n}^{s=m-1} (d_s - d_{s+1}) + \varepsilon\, d_m = \varepsilon\, d_n < \varepsilon. \quad \text{C. Q. F D.}$$

Posons $z = \sigma + i\tau$. Il résulte du théorème I qu'il existe un nombre réel λ tel que la série (1) converge pour $\sigma > \lambda$, et diverge pour $\sigma < \lambda$. Le domaine de convergence est donc un demi-plan limité à gauche par la droite $\sigma = \lambda$. Cette droite s'appelle *la droite de convergence*, et λ, *l'abscisse de convergence*. La convergence est uniforme dans tout domaine fini intérieur au demi-plan $\sigma > \lambda$, car un tel domaine peut toujours être enfermé dans un secteur $\mathcal{D}_0$ de sommet $z_0 = \lambda + \varepsilon$, ε étant un nombre positif suffisamment petit. La série représente donc une fonction analytique, soit $F(z)$, qui est holomorphe à l'intérieur du demi-plan $\sigma > \lambda$. Si $\lambda = -\infty$, la série converge dans tout le plan, et représente une fonction entière de z; par contre, si elle diverge pour toute valeur de z non entière et positive, nous convenons de dire que $\lambda = \infty$.

Si λ est fini et plus grand que l'entier positif n, la série converge aux points $z = 1, 2, \ldots, n$, situés hors du domaine de convergence, mais les valeurs de sa somme en ces points n'ont pas nécessairement de rapport avec les valeurs que pourrait y prendre la fonction analytique $F(z)$.

Sur la droite de convergence $\sigma = \lambda$, la série peut être convergente ou non; mais si elle converge en un point z_0 de cette droite, le théorème II nous apprend que la fonction $F(z)$ tend vers une limite quand z tend vers z_0 à l'intérieur de $\mathcal{D}_0$, et que cette limite est égale à la somme de la série en ce point z_0. Cette affirmation n'est évidemment pas possible si z_0 est entier positif,

et, effectivement, nous allons rencontrer, dans ce cas, des exemples de discontinuité très importants.

II. — Développements de zéro. Séries réduites.

50. On peut exprimer facilement les coefficients d'une série de Newton, en fonction des valeurs que doit prendre sa somme aux points $z = 1, 2, 3, \ldots$. Si nous désignons ces valeurs par $F(1)$, $F(2), F(3)\ldots$, les a_s seront en effet définis par le système d'équations linéaires

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} F(1) = a_0, \\ F(2) = a_0 - a_1, \\ F(3) = a_0 - 2a_1 + a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F(n+1) = a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \ldots + (-1)^n a_n. \end{array}\right.$$

Ces équations les déterminent d'une manière unique, et leur forme même montre (1) que

$$(7)\qquad (-1)^s a_s = \overset{s}{\Delta} F(1) \qquad s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Si l'abscisse de convergence d'une série (1) est inférieure à 1, les $F(n)(n = 1, 2, \ldots)$ ne sont autre chose que les valeurs que prend aux points n la fonction analytique $F(z)$ représentée par la série, et l'on a

$$(8)\qquad F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \overset{s}{\Delta} F(1) \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{s!},$$

où les $\overset{s}{\Delta} F(1)$ sont les différences de cette fonction $F(z)$. Avec la condition $\lambda < 1$, les coefficients de la série sont donc entièrement déterminés par les valeurs de la fonction $F(z)$, et ce développement est unique.

En particulier, il n'y a pas de série, dont les coefficients ne sont pas tous nuls, qui représente zéro dans un domaine d'abscisse de convergence $\lambda < 1$.

---

(1) On voit d'ailleurs que ces équations sont des cas particuliers de la formule (23) du Chapitre I; le reste R_{n+1} disparaît en effet pour $a = 1$, $z = n+1$.

Il n'en est plus de même si $p \leqq \lambda < p+1$, p étant un entier positif. La fonction analytique $F(z)$ n'est plus nécessairement représentée par la série aux points $z = 1, 2, \ldots, p$, et, dans les formules (7), $F(1), F(2), \ldots, F(p)$ sont, non les valeurs possibles de cette fonction, mais les valeurs de la somme de la série en ces points. Si, pour établir la distinction, nous désignons maintenant ces valeurs par $A_1, A_2, \ldots, A_p$, les équations (7) s'écrivent

$$a_s = \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n \binom{s}{n} A_{n+1} + \sum_{n=p}^{s} (-1)^n \binom{s}{n} F(n+1),$$

et dans le développement (1), on pourra mettre ces constantes en évidence, car leurs facteurs sont des séries convergentes pour $\sigma > \lambda$. En effet, le facteur de A_1 est la série de Newton

$$\Psi_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{z-1}{s}, \tag{9}$$

dont le terme général est de l'ordre de $\frac{1}{s^\sigma}$, et qui converge absolument pour $\sigma > 1$. D'une manière générale, celui de A_{r+1} est

$$\begin{aligned} \Psi_{r+1}(z) &= (-1)^r \sum_{s=r}^{\infty} (-1)^s \binom{z-1}{s} \binom{s}{r} \\ &= \binom{z-1}{r} \sum_{s=r}^{\infty} (-1)^{s-r} \binom{z-r-1}{s-r} \\ &= \binom{z-1}{r} \Psi_1(z-r), \end{aligned} \tag{10}$$

qui converge absolument pour $\sigma > r+1$.

La partie du développement (1)

$$A_1 \Psi_1(z) + A_2 \Psi_2(z) + \ldots + A_p \Psi_p(z) \tag{11}$$

est donc convergente dans le domaine $\sigma > p$; en outre, elle doit s'annuler aux points $z = p+1, p+2, \ldots$, car la série, formée par les autres termes du développement, converge pour $\sigma > \lambda$ et a pour coefficients les solutions des équations (6), où l'on annulerait les quantités $F(1), F(2), \ldots, F(p)$, sans changer $F(p+1)$, $F(p+2), \ldots$. Nous allons voir d'ailleurs que (11) est identiquement nulle dans tout le domaine $\sigma > p$.

51. Considérons d'abord $\Psi_1(z)$. On a évidemment

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{z-1}{s} = \left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right) n = \frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(2-z)\Gamma(n)};$$

quand n augmente indéfiniment, le dernier membre tend vers zéro si $\sigma > 1$, reste compris entre des limites finies pour $\sigma = 1$, et augmente indéfiniment si $\sigma < 1$. La droite de convergence de (9) est bien $\sigma = 1$, et sa somme est nulle pour $\sigma > 1$. Sur la droite de convergence, elle est oscillante entre des limites finies, sauf au point $z = 1$ où elle se réduit à son premier terme, qui est égal à 1. En résumé,

$$\Psi_1(z) = 0 \qquad \text{si} \qquad \sigma > 1, \qquad \text{et} \qquad \Psi_1(1) = 1.$$

Nous avons ainsi, au point $z = 1$, un exemple de discontinuité qui fait exception au théorème II.

Nous voyons en outre que la série de Newton peut représenter zéro sans que tous ses coefficients soient nuls. Il y a même une infinité de représentations de zéro, comme le montre l'examen des autres séries $\Psi_{r+1}(z)$. D'après l'expression (10), cette série, d'abscisse de convergence $\lambda = r+1$, est nulle pour $\sigma > r+1$. Elle diverge pour $\sigma \leqq r+1$, en exceptant les points $z = 1, 2, 3, \ldots, r+1$, où l'on a

$$\Psi_{r+1}(s) = 0, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, r,$$
$$\Psi_{r+1}(r+1) = 1.$$

Il résulte de ces propriétés que (11) est identiquement nulle dans tout le domaine $\sigma > p$, et prend la valeur A_r au point

$$z = r, \qquad r = 1, 2, \ldots, p;$$

réciproquement, si l'on impose à une série de Newton de s'annuler aux points $p+1, p+2, \ldots$, elle est nécessairement de la forme (11). Cette expression est donc la forme la plus générale d'un développement de zéro ayant l'abscisse de convergence au plus égale à p.

52. L'attention sur le rôle de ces développements a été attirée par G. Frobenius [1] et S. Pincherle [2].

Le raisonnement du paragraphe précédent nous montre que, si

l'on change les valeurs que doit prendre la série (1) en un nombre fini de points d'affixes entiers positifs $z = 1, 2, \ldots, p$, la nouvelle série obtenue représente la même fonction que l'ancienne dans le domaine commun à $\sigma > \lambda$, $\sigma > p$. Si $\lambda \neq p$, la nouvelle abscisse de convergence est le plus grand de ces deux nombres; on peut donc modifier le domaine de convergence d'une série en lui ajoutant un développement de zéro convenablement choisi. On peut toujours le diminuer, car il suffit de prendre $p > \lambda$, mais on ne peut espérer l'augmenter que si λ est lui-même un entier positif p. Une telle extension du domaine de convergence, réalisant un prolongement analytique de la fonction $F(z)$, n'est possible que si cette fonction est holomorphe dans un demi-plan plus grand que le domaine de convergence de la série initiale.

On voit ainsi que toute fonction $F(z)$, représentable par une série de Newton, admet une infinité de développements, différant par des développements de zéro, et l'on obtiendra ceux de domaine de convergence maximum en identifiant la fonction et la somme de la série pour toutes les valeurs entières et positives de z situées dans le demi-plan d'holomorphie de la fonction.

D'une manière plus précise, si p est le plus petit entier positif tel que la fonction $F(z)$ soit holomorphe pour $\sigma > p$, et continue à droite au point p, nous appellerons *série réduite* toute série dont la somme est égale à la valeur de la fonction $F(z)$ aux points $z = p, p+1, p+2, \ldots$. Nous entendons d'ailleurs par $F(p)$ la

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(p+\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0.$$

Si $p > 1$, il y a une infinité de séries réduites dépendant encore de $p-1$ constantes arbitraires A_s $(s = 1, 2, \ldots, p-1)$. Mais, λ étant au moins égal à p, et les développements de zéro

$$A_1 \Psi_1(z) + A_2 \Psi_2(z) + \ldots + A_{p-1} \Psi_{p-1}(z)$$

ayant l'abscisse de convergence inférieure ou égale à $p-1$, toutes ces séries réduites ont le même domaine de convergence. On pourra, par exemple, annuler ces constantes; ou encore, il pourra être plus simple d'égaler A_s à $F(s)$ en tout point $z = s$ où la fonction est encore holomorphe, mais on ne peut songer à améliorer ainsi l'abscisse de convergence, qui est déjà minimum pour toute série réduite. Si $\lambda < 1$, il n'y a qu'une série réduite.

Il arrive que l'abscisse de convergence λ d'une série réduite soit supérieure à l'entier positif p. En ajoutant à cette série un développement de zéro d'abscisse de convergence inférieure à λ, on obtient une nouvelle série dont l'abscisse de convergence est encore égale à λ. Pour abréger le langage, nous appellerons encore *série réduite* toute série ainsi obtenue. Avec cette extension, nous dirons donc qu'une série (1) est réduite, si l'on a choisi les coefficients a_s tels que la somme de la série soit égale à la valeur de la fonction $F(z)$ pour toute valeur entière et positive de z supérieure ou égale à λ.

53. Considérons par exemple la fonction

$$F(z) = \frac{1}{z-\alpha},$$

α étant un nombre quelconque. Si α n'est pas entier positif, on peut prendre pour somme de la série aux points $z = 1, 2, 3, \ldots$ les valeurs de $F(z)$ en ces points, et les équations (7) donnent alors la série réduite

$$\frac{1}{z-\alpha} = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-s-1)}. \tag{12}$$

Le terme général de cette série montre qu'elle converge pour $\sigma > \mathcal{R}(\alpha)$, et, d'autre part, elle ne peut converger pour $\sigma < \mathcal{R}(\alpha)$, puisqu'elle doit représenter une fonction holomorphe dans tout son domaine de convergence. Son abscisse de convergence est donc $\mathcal{R}(\alpha)$.

Si α est un entier positif p, cette série n'a pas de sens; mais on peut choisir arbitrairement la somme de la série au point $z = p$, ou, ce qui revient au même, le coefficient a_{p-1}. En prenant $a_{p-1} = 0$, on trouvera la série réduite

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-p} = &-\sum_{s=0}^{p-2} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-s-1)} \\ &+\sum_{s-p}^{\infty} (-1)^{s-p} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{(p-1)!\,(s+1-p)!} \\ &\times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s+1-p}\right),\end{aligned}$$

d'abscisse de convergence p, et coïncidant en outre avec $F(z)$ aux points $z = 1, 2, \ldots, p-1$.

La dérivation de (12) par rapport à α donne la série

$$\frac{1}{(z-\alpha)^2} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-s-1)} \times \left(\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-2} + \ldots + \frac{1}{\alpha-s-1}\right),$$

dont l'abscisse de convergence est encore $\mathcal{R}(\alpha)$. En dérivant un nombre quelconque de fois, on démontre que toute fonction rationnelle admet un développement de la forme (1).

III. — Convergence absolue.

54. Les deux exemples que nous avons rencontrés, développements de zéro et série (12), convergent absolument dans tout leur domaine de convergence. Mais d'autres circonstances peuvent se présenter. Considérons, par exemple, la série

$$(13) \qquad (1+a)^{z-1} = \sum_{s=0}^{\infty} a^s \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{s!}.$$

Si $|a| < 1$, elle converge absolument dans tout le plan.

Si $|a| > 1$, elle ne converge que pour $z = 1, 2, 3, \ldots$, et l'on a $\lambda = \infty$.

Si a tend vers -1, on retrouve le développement de zéro $\Psi_1(z)$, et $\lambda = 1$.

Enfin, si $|a| = 1$, et $a \neq -1$, trois cas sont à distinguer :

1° Pour $\sigma > 1$, la série converge absolument.

2° Pour $0 < \sigma \leq 1$, elle converge, mais non absolument.

3° Pour $\sigma \leq 0$, la série est divergente.

On a donc ici $\lambda = 0$, mais la convergence n'est absolue que pour $\sigma > 1$. De plus, la série diverge sur la droite de convergence $\sigma = 0$, et converge simplement en tout point de la droite $\sigma = 1$, exception faite de $z = 1$ où elle se réduit à son premier terme. On trouve la démonstration de ces faits dans un Mémoire célèbre de N.-H. Abel [1], mais il sera facile de les vérifier à l'aide des résultats des paragraphes suivants.

55. Cet exemple met en évidence une circonstance qui ne se rencontre pas chez les séries de puissances. Une série de Newton peut non seulement converger simplement sur la frontière du domaine de convergence, mais encore dans un certain ensemble à deux dimensions intérieur à ce domaine. Il y a donc lieu de se demander quel pourra être le domaine de convergence absolue de la série (1). Pour le voir, I. Bendixson [2] démontre que :

THÉORÈME III. — *Si la série* (1) *converge absolument pour* $z = z_0$ (z_0 *non entier positif*), *elle converge absolument dans tout le demi-plan* $\sigma \geq \sigma_0$.

En effet, dans ces conditions, $|c_s|$ reste borné quel que soit s, et l'on a alors

$$\sum_{s=n}^{s=m} |b_s c_s| < C \sum_{s=n}^{s=m} |b_s|.$$

La convergence de la série $\Sigma|b_s|$ entraîne donc celle de $\Sigma|b_s c_s|$. Il résulte de ce théorème (1) que, à moins que la série (1) ne soit absolument convergente quel que soit z, ou partout divergente, il existe un nombre réel μ tel qu'elle converge absolument pour $\sigma > \mu$, mais non pour $\sigma < \mu$. La droite $\sigma = \mu$ s'appelle la *droite de convergence absolue*. Toute série de Newton possède ainsi deux nombres caractéristiques, l'abscisse de convergence λ et l'abscisse de convergence absolue μ. On a évidemment $\lambda \leq \mu$, et, si $\lambda < \mu$, la série converge simplement dans la bande $\lambda < \sigma < \mu$. Ce théorème nous apprend même que, sur la droite $\sigma = \mu$, il y a convergence absolue partout ou nulle part. Mais sur $\sigma = \lambda$, il arrive que la série converge en certains points et diverge en d'autres.

La bande de convergence simple, qui peut disparaître, comme nous l'avons vu, a, d'autre part, un maximum de largeur. C'est ce qui résulte du

THÉORÈME IV (2). — *Si la série* (1) *converge pour* $z = z_0$, *elle converge absolument pour* $\sigma > \sigma_0 + 1$.

---

(1) I. Bendixson [2], E. Landau [1].
(2) N. Nielsen [2], E. Landau [1].

On peut écrire en effet

$$|c_s| < \frac{C}{s^{\sigma-\sigma_0}}, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots,$$

et, $|b_s|$ restant borné par hypothèse, il vient

$$\sum_{s=n}^{m} |b_s c_s| < C \sum_{s=n}^{m} \frac{1}{s^{\sigma-\sigma_0}};$$

or, cette dernière somme, convergente puisque $\sigma > \sigma_0 + 1$, est infiniment petite avec $\frac{1}{n}$.

La largeur de la bande de convergence simple est donc comprise entre 0 et 1. Nous avons eu, avec $\Psi_1(z)$ et la série (12) des exemples où $\mu - \lambda = 0$, et, avec la série (13), un exemple où $\mu - \lambda = 1$. Nous verrons plus loin que, pour la série de Newton relative à $\frac{1}{\Gamma(z)}$, on a $\mu - \lambda = \frac{1}{2}$. D'ailleurs $\mu - \lambda$ peut prendre une valeur quelconque entre 0 et 1 ; c'est ce qu'il est aisé de voir en ajoutant l'une à l'autre les deux séries (12) et (13) : si $0 \leq \alpha \leq 1$, et $|a| = 1$, $a \neq -1$, on a, en effet, $\lambda = \alpha$, $\mu = 1$, pour la série réduite qui représente la fonction

$$(1+a)^z + \frac{1}{z-\alpha}.$$

56. Quant à ce qui se passe sur la droite de convergence, il suffit de quelques exemples pour se rendre compte que des circonstances très diverses peuvent se présenter. Nous savons déjà que tout développement de zéro $\Psi_{r+1}(z)$ diverge sur sa droite de convergence, sauf au point $z = r+1$. Il en est à peu près de même pour la série (12). En effet, elle se déduit encore de l'identité

$$\frac{1}{z-\alpha} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-s-1)} + \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)} \frac{1}{z-\alpha},$$

cas particulier de la formule (19) (§ 5), et l'expression de son terme complémentaire montre qu'elle diverge sur sa droite de convergence absolue.

Pour $(1+a)^{z-1}$, avec $|a|=1$, $a\neq -1$, il résulte de ce que nous avons dit qu'elle converge simplement sur sa droite de convergence absolue, et diverge sur sa droite de convergence.

Voici enfin deux exemples de circonstances nouvelles. Pour la série

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(\log s)^2} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s.s!},$$

la valeur absolue de son terme général est asymptotique à $\frac{1}{s^{1+\sigma}(\log s)^2}$; d'autre part, on vérifie immédiatement que, pour z très petit et négatif, elle est à termes positifs, et divergente. On voit donc que $\mu=\lambda=0$, avec convergence absolue sur la droite $\sigma=0$.

Considérons de même la série

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{\log s} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!};$$

sa droite de convergence simple est $\sigma=0$, et sa droite de convergence absolue est $\sigma=1$, et elle converge simplement sur ces deux droites, le point $z=1$ étant excepté. Pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème (1) suivant : « La série $\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(s)$ converge si $\lim_{s\to\infty}\varphi(s)=0$ et si l'intégrale $\int_a^{\infty}|\varphi''(s)|\,ds$ est convergente » qui démontre la convergence sur l'axe imaginaire.

IV. — L'abscisse de convergence.

57. Après les généralités des paragraphes précédents sur la nature de la convergence d'une série de Newton, il nous reste à préciser la détermination des abscisses de convergence d'une série (1) donnée. Nous allons voir, par une succession d'inégalités, que l'abscisse de convergence λ est égale à l'un ou l'autre

(1) *Acta math.*, t. XLIV, 1923, p. 91-93.

des deux nombres

$$\varkappa = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left|\sum_{s=0}^{s=n} a_s\right|}{\log n},$$

$$k = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left|\sum_{s=n}^{\infty} a_s\right|}{\log n},$$

et nous démontrerons en même temps un autre résultat qui nous sera utile plus loin.

1° Si la série (1) converge en un point $z = \sigma + i\tau$, non entier positif, de partie réelle $\sigma \geqq 0$, on a $\varkappa \leqq \sigma$.

Posons

$$b_s = (-1)^s a_s \binom{z-1}{s}, \qquad d_s = \frac{s!}{(1-z)(2-z)\dots(s-z)},$$

et appliquons la transformation d'Abel à $\Sigma a_s = \Sigma b_s d_s$. Il vient

$$(14)\qquad \sum_{s=n}^{s=m} b_s d_s = d_n \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu + \sum_{s=n}^{s=m-1} (d_{s+1} - d_s) \sum_{\nu=s+1}^{\infty} b_\nu - d_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} b_\nu,$$

avec

$$d_{s+1} - d_s = d_s \frac{z}{s+1-z}.$$

La valeur asymptotique de d_s permet d'écrire

$$|d_s| < C s^\sigma,$$
$$|d_{s+1} - d_s| < C s^{\sigma-1};$$

d'autre part, l'hypothèse de la convergence exprime que

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu\right| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad n \geqq n_0;$$

donc, si $\sigma > 0$, (14) entraîne

$$(15)\qquad \left|\sum_{s=n_0}^{s=m} a_s\right| < C\varepsilon\left(n_0^\sigma + \sum_{s=n_0}^{s=m-1} s^{\sigma-1} + m^\sigma\right)$$
$$< C\varepsilon\left(n_0^\sigma + \frac{m^\sigma + n_0^\sigma}{\sigma} + m^\sigma\right),$$

et, par suite,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{s=0}^{s=m} a_s}{m^\sigma} = 0. \tag{16}$$

Mais si $\sigma = 0$, on passe de (15) à

$$\left| \sum_{s=n_0}^{s=m} a_s \right| < C\varepsilon \left(2 + \sum_{s=n_0}^{s=m-1} \frac{1}{s} \right) < C\varepsilon (2 + \log m),$$

de sorte que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{s=0}^{s=m} a_s}{\log m} = 0. \tag{17}$$

Par conséquent, si $\lambda \geqq 0$, on aura $\varkappa \leqq \lambda$.

2° Si la série converge en un point z d'abscisse $\sigma < 0$, on a $k \leqq \sigma$. On peut faire tendre m vers l'infini, dans l'équation (14); le dernier terme disparaît et il vient alors, pour $n \geqq n_0$,

$$\left| \sum_{s=n}^{\infty} a_s \right| < C\varepsilon \left(n^\sigma + \sum_{s=n}^{\infty} s^{\sigma-1} \right) < C\varepsilon \left(n^\sigma - \frac{(n-1)^\sigma}{\sigma} \right),$$

d'où résulte

$$\lim_{m\to\infty} n^{-\sigma} \sum_{s=n}^{\infty} a_s = 0. \tag{18}$$

Par conséquent, si $\lambda < 0$, on aura $k \leqq \lambda$.

3° Si $\varkappa$ est fini, la série (1) converge pour $z = \varkappa + \delta$, δ étant un nombre positif arbitraire.

Posons

$$c_s = (-1)^s \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{s!},$$

et appliquons à la série (1) la transformation d'Abel

$$\sum_{s=n}^{s=m} a_s c_s = \sum_{s=n}^{s=m} (c_s - c_{s+1}) \sum_{\nu=0}^{\nu=s} a_\nu - c_n \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} a_\nu + c_{m+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} a_\nu. \tag{19}$$

D'après notre hypothèse,

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\nu=s} a_\nu \right| < C s^{\varkappa + \frac{\delta}{4}},$$

et d'autre part, si $z = \varkappa + \delta$, on a

$$|c_s| < \frac{C}{s^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}, \qquad |c_s - c_{s+1}| < \frac{C}{s^{\varkappa+\frac{\delta}{2}+1}};$$

donc

$$\left|\sum_{s=n}^{s=m} a_s c_s\right| < C\left[\sum_{s=n}^{s=m} \frac{1}{s^{\frac{\delta}{4}+1}} + \frac{(n-1)^{\varkappa+\frac{\delta}{4}}}{n^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}} + \frac{m^{\varkappa+\frac{\delta}{4}}}{(m+1)^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}\right],$$

qui tend bien vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par conséquent $\lambda \leq \varkappa$.

4° Si la limite k existe, la série (1) converge pour $z = k + \delta$. Appliquons encore la transformation d'Abel à cette série, mais en mettant maintenant en évidence les sommes $\sum_{\nu=s}^{\infty} a_\nu$. Il vient

$$(20) \qquad \sum_{s=n}^{s=m} a_s c_s = \sum_{s=n+1}^{s=m} (c_s - c_{s-1}) \sum_{\nu=s}^{\infty} a_\nu + c_n \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu.$$

Par hypothèse,

$$\left|\sum_{\nu=s}^{\infty} a_\nu\right| < C s^{k+\frac{\delta}{4}},$$

et, en prenant $z = k + \delta$, la démonstration est identique à la précédente. Il en résulte $\lambda \leq k$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant (1) :

THÉORÈME. — *Si l'abscisse de convergence* λ *de la série de Newton est* ≥ 0, *elle est égale à* $\varkappa$, *mais si* $\lambda < 0$, *on a* $\lambda = k$.

Ou encore, l'abscisse de convergence λ est égale à $\varkappa$ ou k, suivant que la série diverge ou non au point $z = 0$.

58. Les deux expressions de λ que nous venons de trouver, en fonction des a_s, se réunissent en une seule si l'on introduit les

(1) Le théorème analogue pour les séries de Dirichlet a été donné par E. Cahen et S. Pincherle [6]. E. Landau [1] a démontré qu'il subsiste pour la série de Newton.

valeurs de la somme de la série aux points $z = 1, 2, 3, \ldots$. En désignant, comme au paragraphe 50, ces quantités par $F(1), F(2), F(3), \ldots$, et par $F(0)$ une constante arbitraire, les formules (7) donnent l'expression formelle

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = F(0) - (-1)^n \overset{n}{\Delta} F(0).$$

Si $\lambda \geqq p \geqq 0$, p étant entier, on a donc

$$\lambda = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left| \overset{n}{\Delta} F(0) \right|}{\log n}, \tag{21}$$

et nous savons que les $F(s)$ $(s > p)$ sont les valeurs de la fonction analytique $F(z)$ représentée par la série; on peut également vérifier sur cette expression que la limite est indépendante des valeurs choisies pour $F(0)$, et, si $p \geqq 1$, pour $F(1), F(2), \ldots, F(p-1)$. On sait même que si la série est réduite, et si $p \geqq 1$, cette limite ne dépend pas de la valeur choisie pour $F(p)$.

Si $\lambda < 0$, on peut prendre pour $F(0)$ la somme de la série

$$F(0) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s,$$

de sorte que

$$\sum_{s=n}^{\infty} a_s = (-1)^n \overset{n}{\Delta} F(0),$$

et la formule (21) est encore valable; mais maintenant les $F(0)$, $F(1), F(2), \ldots$ sont tous des valeurs de la fonction analytique $F(z)$ représentée par la série (1).

Pour déterminer l'abscisse de convergence absolue, il suffit, d'après le théorème III, de supposer z réel. On a ainsi une nouvelle série de Newton, déduite de (1) en remplaçant les a_s par leurs valeurs absolues, et par suite

$$\mu = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \sum_{s=0}^{s=n} |a_s|}{\log n} \qquad \text{si} \qquad \mu \geqq 0,$$

$$\mu = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \sum_{s=n}^{\infty} |a_s|}{\log n} \qquad \text{si} \qquad \mu < 0.$$

V. — Transformations linéaires.

59. Le fait qu'en général une série de Newton ne converge pas absolument partout où elle converge, est souvent embarrassant, et pose le problème de la remplacer par un développement qui converge absolument dans tout le demi-plan de convergence. C'est ce que permettent d'obtenir les deux transformations d'Abel utilisées au paragraphe 57.

Supposons d'abord que (1) converge au point z, d'abscisse σ positive, et reprenons (19) avec $n = 0$:

$$(22)\quad \sum_{s=0}^{s=m-1} a_s c_s = \sum_{s=0}^{s=m-1} (-1)^s \frac{z(z-1)\dots(z-s)}{1.2\dots(s+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=s} a_\nu + c_m \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} a_\nu ;$$

si maintenant m augmente indéfiniment, le dernier terme tend vers zéro d'après la formule (16), ce qui donne le nouveau développement

$$(23)\quad F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z(z-1)\dots(z-s)}{1.2\dots(s+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=s} a_\nu$$
$$= a_0 z - \frac{z(z-1)}{1.2}(a_0+a_1) + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}(a_0+a_1+a_2)+\dots.$$

Soit λ l'abscisse de convergence de (1); désignons par λ' le plus grand des deux nombres λ et 0. (16), et par suite (23), sont vraies pour $\sigma > \lambda'$, et le terme général montre immédiatement que (23) converge absolument si $\sigma > \lambda'$, mais non si $\sigma < \lambda$. L'abscisse de convergence absolue est donc λ si $\lambda \geq 0$. Si $\lambda > 0$. la formule (16) nous apprend même que (23) converge, sur $\sigma = \lambda$, aux mêmes points que (1), mais nous ne pouvons l'affirmer si $\lambda = 0$.

Admettons maintenant que λ soit négatif. Le développement (23) est encore valable pour $\sigma > 0$, mais on peut en obtenir un autre à partir de (20). Si $n = 0$, on a en effet

$$(24)\quad \sum_{s=0}^{s=m} a_s c_s = F(0) + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \frac{z(z-1)\dots(z-s+1)}{s!} \sum_{\nu=s}^{\infty} a_\nu - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu .$$

D'après la formule (18), lorsque m augmente indéfiniment, le dernier terme tend vers zéro si $\sigma > \lambda$. Il vient alors

$$(25) \qquad F(z) = F(0) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{z(z-1)\dots(z-s+1)}{s!} \sum_{\nu=s}^{\infty} \acute{a}_\nu.$$

Cette équation est valable pour $\sigma > \lambda$; elle est même vraie si $\lambda = 0$, à condition que la série (1) converge au point $z = 0$. Cette nouvelle série admet λ comme abscisse de convergence absolue; si (1) converge en un point de la droite $\sigma = \lambda$, la formule (18) est encore valable pour $\sigma = \lambda$, et, par suite, (25) converge aux mêmes points que (1) sur cette droite.

La série (25) est évidemment la série réduite, puisque son abscisse de convergence est négative. Elle diffère de (23) par le développement de zéro

$$F(0)\,\Psi_1(z+1).$$

Par conséquent, si $F(0) \neq 0$, (23) n'est pas réduite, et diverge dans la bande $\lambda \leq \sigma \leq 0$, $z = 0$ étant excepté. Mais en ce point sa somme est nulle, donc différente de la valeur de la fonction $F(z)$. Si $F(0) = 0$, (23) et (25) sont identiques, et leur abscisse de convergence absolue est λ.

Remarquons enfin que, si $\lambda > 0$, la série (23) est toujours réduite en même temps que (1).

60. Nous appliquerons la transformation (23) ou (25) suivant que λ sera positif ou négatif, et nous savons que, dans ces deux cas, la nouvelle série admet λ comme abscisse de convergence absolue, et, sur $\sigma = \lambda$, converge aux mêmes points que (1).

Si $\lambda = 0$, (25) n'est applicable que si (1) converge pour $z = 0$, et l'équation (24) montre qu'elle converge alors, sur l'axe imaginaire, aux mêmes points que (1). Il n'en est pas de même de (23), qui n'est réduite que si $F(0) = 0$. Enfin, si (1) diverge pour $z = 0$, (23) seule a un sens, mais on voit, sur (22), qu'elle diverge en tous les points de l'axe imaginaire, autres que $z = 0$, et en ce point elle ne représente pas la fonction $F(z)$.

C'est ce qui se présente, par exemple, pour la série

$$F(z)=\sum\frac{(-1)^p}{p}\binom{z-1}{p}=-\frac{z-1}{1}+\frac{(z-1)(z-2)}{1.2.2}$$
$$-\frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{1.2.3.3}-\frac{(z-1)\ldots(z-5)}{5!\,5}+\ldots,$$

où la sommation est étendue aux nombres premiers $p=1, 2, 3, 5, 7, \ldots$. E. Landau [1] a démontré en effet que cette série, ainsi que la série de Dirichlet $\sum\frac{1}{p}\frac{1}{p^z}$, converge simplement sur l'axe imaginaire, à l'exception de $z=0$ où elle diverge. La transformation (25) n'a pas de sens et la série (23)

$$F(z)=-\frac{z(z-1)}{1.2}+\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{z\ldots(z-4)}{5!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots$$

n'est valable que dans le demi-plan de convergence absolue $\sigma>0$. On a ainsi effectivement un exemple de série (1) qui converge sur l'axe imaginaire, tandis que (23) et (25) y sont inapplicables.

61. En effectuant la transformation (23) p fois de suite, on trouvera

$$F(z)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(z+p-1)(z+p-2)\ldots(z-s)}{(s+p)!}$$
$$\times\left[a_s+\binom{p}{1}a_{s-1}+\binom{p+1}{2}a_{s-2}+\ldots+\binom{p+s-1}{s}a_0\right],$$

et il résulte de notre démonstration que cette série converge absolument pour $\sigma>\lambda$, $\sigma>0$.

La transformation (25), appliquée également p fois de suite, donnerait

$$(26)\quad F(z)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(z+p-1)(z+p-2)\ldots(z+p-s)}{s!}a_s(p),$$

où l'on a posé

$$a_s(p)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{p+\nu-1}{\nu}a_{\nu+s}.$$

De ce que nous savons, lorsque la série (1) converge pour $z = 0$, on conclut que :

Théorème. — *Si* (1) *converge pour* $z = 1 - p$ (*p entier positif*), *la série* (26) *converge aux mêmes points qu'elle, et, en particulier, converge absolument pour* $\sigma > \lambda$.

D'ailleurs, la série (26) n'a pas de sens si (1) diverge pour $z = 1 - p$.

VI. — Fonction majorante.

62. Pour qu'une fonction puisse se représenter par la série de Newton, nous savons qu'elle doit être holomorphe dans un certain demi-plan $\sigma > \lambda$. Mais cela ne suffit pas, et nous allons démontrer, en outre, que sa valeur absolue doit vérifier une inégalité importante, due à F. Carlson [1].

Considérons la fonction $F(z)$ définie par la série (1), d'abscisse de convergence λ. Pour obtenir un développement qui converge absolument dans tout le demi-plan $\sigma > \lambda$, appliquons la transformation (23) ou la transformation (25), suivant que (1) diverge ou converge au point $z = 0$. Dans les deux cas, $F(z)$ se représente par une série de la forme

$$F(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n, \tag{27}$$

où, par un léger changement des notations précédentes, nous posons

$$c_n = \frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!}, \tag{28}$$

et où l'on a, soit

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} a_\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

soit

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

On sait également que l'on a toujours

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |b_n|}{\log n} = \lambda - 1. \tag{29}$$

Mais si la série (1) converge en un point non entier positif de $\sigma = \lambda$, le paragraphe 57 nous permet d'écrire les relations un peu plus précises

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-\lambda} b_n = 0, \qquad \lambda \geq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n b_n}{\log n} = 0, \qquad \lambda = 0.$$

Pour étudier simultanément ces différents cas, admettons que, ε étant un nombre positif quelconque, on sache trouver un entier positif n_0 tel que l'on ait

$$|b_n| < \varepsilon n^{\lambda+\delta-1} \log^{\nu} n, \qquad \text{si } n \geq n_0. \tag{30}$$

Nous supposerons d'abord $\delta > 0$; on peut alors annuler ν sans diminuer la généralité. Nous considérons ensuite le cas $\delta = 0$, ν étant positif.

Ceci posé, pour déterminer une limite supérieure de $|F(z)|$ dans le demi-plan $\sigma > \lambda$, il nous faut voir d'abord comment se comportent les c_n pour les très grandes valeurs de n et de $|z|$. Nous distinguerons deux cas suivant que le point $z = \sigma + i\tau = re^{i\nu}$ s'éloigne à l'infini dans un demi-plan $\sigma \geq L$, L étant un nombre positif assez grand, ou dans la bande $\lambda < \sigma < L$. Il nous suffira d'ailleurs largement de prendre

$$L = 1 + \tfrac{1}{4}\lambda^2.$$

63. Pour le demi-plan $\sigma \geq L$, étudions, comme pour la série de Stirling, le rapport de deux c_n consécutifs

$$\xi(n) = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|; \tag{31}$$

en développant, ce rapport s'écrit

$$\xi(n) = \left|\frac{z-n}{n}\right| = \sqrt{1 + \frac{r^2}{n^2} - \frac{2r}{n}\cos\nu}, \tag{32}$$

et sa dérivée par rapport à n est donnée par

$$\xi(n)\,\xi'(n) = -\frac{r}{n^3}(r - n\cos\nu). \tag{33}$$

Il y a donc une valeur, et une seule, de n telle que

$$\xi(\bar{n}) = 1,$$

et c'est

$$\bar{n} = \frac{r}{2\cos\rho} = \frac{r^2}{2\sigma}.$$

(33) montre que $\xi(n)$ décroît dans l'intervalle $1 \leqq n \leqq 2\bar{n}$, et croît ensuite pour $n > 2\bar{n}$, en tendant vers 1 quand n augmente indéfiniment. En résumé, on a :

$$\xi(n) > 1 \quad \text{pour} \quad n < \bar{n},$$
$$\xi(n) < 1 \quad \text{pour} \quad n > \bar{n},$$

et les termes de la série (27) qui ont la plus grande influence sur l'ordre de grandeur de $F(z)$ sont ceux dont l'indice est dans un certain voisinage de $\bar{n}$; en particulier, le plus grand des coefficients c_n est celui dont l'indice est la partie entière n' de $\bar{n}$.

Pour avoir une valeur asymptotique de $c_{n'}$, considérons l'expression de c_n à l'aide de la fonction Γ

$$c_n = \frac{z}{z-n} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(n)\,\Gamma(z-n)}, \tag{34}$$

dans laquelle on peut supposer n non entier, par exemple $n = \bar{n}$. Si n diffère assez peu de $\bar{n}$, on voit, sur

$$z - \bar{n} = \bar{n}\, e^{2i\nu}, \tag{35}$$

que $z - n$ est non négatif, et s'éloigne indéfiniment de l'axe des nombres négatifs quand r augmente indéfiniment. On peut donc utiliser la valeur asymptotique (13) (§ 9) de la fonction Γ, ce qui donne

$$|c_n| < C \left| \left(\frac{z}{z-n}\right)^z \left(\frac{z-n}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{z} \right|.$$

En particulier, pour $n = \bar{n}$, on a, d'après (35),

$$\left| \frac{z-\bar{n}}{\bar{n}} \right| = 1,$$
$$\frac{z}{z-\bar{n}} = 2\cos\rho\, e^{-i\nu},$$

et, par suite,

$$|c_{\bar{n}}| < C\sqrt{r}\, e^{r\psi(\rho)}, \tag{36}$$

où l'on a posé

$$\psi(\varphi) = \cos\varphi \log(2\cos\varphi) + \varphi \sin\varphi. \tag{37}$$

L'inégalité (36) est d'ailleurs valable pour $c_{n'}$, et, par suite, pour tous les c_n. Cela résulte encore de l'expression asymptotique de Γ, qui donne

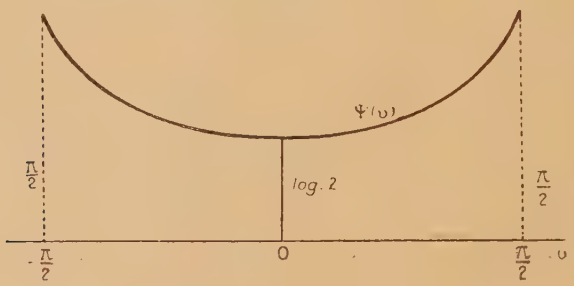
$$\left|\frac{c_{n'}}{c_{\bar{n}}}\right| = \left|\frac{\Gamma(z-\bar{n}+1)\,\Gamma(\bar{n})}{\Gamma(z-n'+1)\,\Gamma(n')}\right| \sim \left|\frac{(z-\bar{n})^{z-\bar{n}+\frac{1}{2}}\,\bar{n}^{\bar{n}-\frac{1}{2}}}{(z-n')^{z-n'+\frac{1}{2}}\,n'^{n'-\frac{1}{2}}}\right|;$$

en posant $\bar{n} - n' = \theta$, on a $0 \leqq \theta \leqq 1$, et il vient

$$\left|\frac{c_{n'}}{c_{\bar{n}}}\right| \sim \left|\frac{\left(\frac{z-\bar{n}}{\bar{n}}\right)^{n'-\bar{n}}}{\left(1+\frac{\theta}{z-\bar{n}}\right)^{z-n'+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\theta}{\bar{n}}\right)^{n'-\frac{1}{2}}}\right|,$$

qui tend vers 1 quand r augmente indéfiniment.

Fig. 9.



Cette fonction $\psi(\varphi)$ joue ici le même rôle important que la fonction de même nom relative à la série de Stirling, mais son étude est plus simple. Elle est paire, et l'on voit facilement qu'elle est croissante dans l'intervalle $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; on a, en effet,

$$\psi'(\varphi) = \sin\varphi\,[-\log(2\cos\varphi) + \varphi\cot\varphi],$$

et l'on vérifie immédiatement que la parenthèse a une dérivée positive dans cet intervalle, et est elle-même positive. On peut

donc construire la courbe de variation ci-dessus, dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$.

En résumé, $\psi(\varphi)$ est essentiellement positive et varie entre les limites

$$\log 2 \leqq \psi(\varphi) \leqq \frac{\pi}{2} \qquad \text{pour} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},$$

et il existe une constante C telle que l'on ait, pour tous les coefficients c_n,

$$|c_n| < C\sqrt{r}\, e^{r\psi(\varphi)}. \tag{38}$$

64. Les résultats précédents nous conduisent à grouper les termes de la série (27) dont les indices sont dans un certain voisinage de $\overline{n}$, et qui suffisent pour déterminer son ordre de grandeur. On y arrive en considérant ceux pour lesquels

$$\overline{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \leqq n \leqq \overline{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

En désignant par n_1 et n_2 $(n_1 < n_2)$ les deux entiers les plus rapprochés qui encadrent cet intervalle, et qui surpassent n_0 dès que r est suffisamment grand, nous partagerons donc notre série en quatre sommes

$$P_0 = \sum_{n=1}^{n=n_0-1} b_n c_n, \qquad P_1 = \sum_{n=n_0}^{n=n_1-1} b_n c_n,$$

$$P_2 = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} b_n c_n, \qquad P_3 = \sum_{n=n_2+1}^{\infty} b_n c_n,$$

que nous allons étudier séparément.

Considérons tout d'abord P_2 ; on a

$$|P_2| < \sum_{n=n_1}^{n=n_2} |b_n c_n| < C\sqrt{r}\, e^{r\psi(\varphi)} \sum_{n=n_1}^{n=n_2} |b_n|,$$

avec l'inégalité évidente

$$\sum_{n=n_1}^{n=n_2} |b_n| < C\varepsilon(n_2 - n_1)\,\overline{n}^{\lambda+\delta-1}\log^{\nu}\overline{n};$$

il vient donc

$$|P_2| < \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{r}\, e^{r\psi(\varphi)}\, n^{\lambda+\delta} \log^{\nu} n. \tag{39}$$

Pour étudier P_3, remarquons que, si $n > n_2$,

$$|c_n| = |c_{n_2}|\, \xi(n_2)\, \xi(n_2+1) \ldots \xi(n-1),$$

et

$$\xi^2(n) < 1 + \frac{r^2}{n\, n_2} - \frac{2\sigma}{n} < 1 + \frac{2\sigma}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} - \frac{2\sigma}{n}$$

$$= 1 - \frac{2\sqrt{\sigma}}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} < 1 - \frac{\sqrt{\sigma}}{n};$$

on a donc

$$\log \xi(n) < -\frac{\sqrt{\sigma}}{2n},$$

$$\log[\xi(n_2)\, \xi(n_2+1) \ldots \xi(n-1)] < -\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$< -\frac{\sqrt{\sigma}}{2} \log \frac{n}{n_2},$$

et, par suite,

$$|c_n| < |c_{n_2}| \left(\frac{n_2}{n}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{\sigma}} \qquad \text{pour} \quad n > n_2.$$

En portant cette limite supérieure dans P_3, il vient

$$|P_3| \leqq \sum_{n=n_2+1}^{\infty} |b_n c_n| < \varepsilon\, n_2^{\frac{1}{2}\sqrt{\sigma}}\, |c_{n_2}| \sum_{n=n_2+1}^{\infty} n^{\lambda+\delta-1-\frac{\sqrt{\sigma}}{2}} \log^{\nu} n,$$

et la série au dernier membre converge parce que $\sigma \geqq L$. En outre, sa somme est inférieure à CI_ν, I_ν étant l'intégrale

$$I_\nu = \int_{n_2}^{\infty} x^{-\alpha-1} \log^{\nu} x\, dx, \tag{40}$$

et où $\alpha = \frac{\sqrt{\sigma}}{2} - \lambda - \delta$ est essentiellement positif. Une intégration par parties donne alors

$$I_\nu = \frac{n_2^{-\alpha}}{\alpha} \log^{\nu} n_2 + \frac{\nu}{\alpha} I_{\nu-1};$$

donc la partie principale de I_ν est le premier terme du second membre, et l'on a enfin

$$|P_3| < \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\sigma}} |c_{n_2}| n_2^{\lambda+\delta} \log^\nu n_2. \tag{41}$$

Considérons enfin P_1. Pour $n < n_1$, on a

$$|c_n| = \frac{|c_{n_1}|}{\xi(n)\xi(n+1)\dots\xi(n_1-1)},$$

et

$$\xi^2(n) > 1 + \frac{r^2}{n.n_1} - \frac{2\sigma}{n} > 1 + \frac{2\sigma}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} - \frac{2\sigma}{n}$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{\sigma}}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} > 1 + \frac{2\sqrt{\sigma}}{n};$$

on en déduit

$$\log \xi(n) > \frac{\sqrt{\sigma}}{n+2\sqrt{\sigma}},$$

$$\log[\xi(n)\xi(n+1)\dots\xi(n_1-1)]$$
$$> \sqrt{\sigma}\left(\frac{1}{n+2\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{n+1+2\sqrt{\sigma}} + \dots + \frac{1}{n_1-1+2\sqrt{\sigma}}\right)$$
$$> \sqrt{\sigma}\log\frac{n_1+2\sqrt{\sigma}}{n+2\sqrt{\sigma}},$$

et, par suite,

$$|c_n| < |c_{n_1}| \left(\frac{n+2\sqrt{\sigma}}{n_1+2\sqrt{\sigma}}\right)^{\nu\sqrt{\sigma}} \qquad \text{pour } n < n_1.$$

P_1 satisfait donc aux inégalités

$$|P_1| \leq \sum_{n=n_0}^{n=n_1-1} |b_n c_n| < \frac{\varepsilon |c_{n_1}|}{(n_1+2\sqrt{\sigma})^{\nu\sqrt{\sigma}}} \sum_{n=n_0}^{n=n_1-1} (n+2\sqrt{\sigma})^{\nu\sqrt{\sigma}} n^{\lambda+\delta-1} \log^\nu n,$$

et, si $\nu \geq 0$,

$$|P_1| < \frac{C\varepsilon |c_{n_1}| \log^\nu n_1}{(n_1+2\sqrt{\sigma})^{\nu\sqrt{\sigma}}} \sum_{n=n_0}^{n=n_1-1} (n+2\sqrt{\sigma})^{\nu\sqrt{\sigma}} n^{\lambda+\delta-1}$$
$$< \frac{C\varepsilon |c_{n_1}| \log^\nu n_1}{(n_1+2\sqrt{\sigma})^{\nu\sqrt{\sigma}}} \int_{n_0}^{n_1} (x+2\sqrt{\sigma})^{\nu\sqrt{\sigma}} x^{\lambda+\delta-1} dx.$$

Si $\lambda+\delta\geq 1$, cette dernière intégrale est inférieure à

$$n_1^{\lambda+\delta-1}\int_{n_0}^{n_1}(x+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}}\,dx=n_1^{\lambda+\delta-1}\,\frac{(n_1+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}+1}-(n_0+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}+1}}{\sqrt{\sigma}+1}.$$

Si $\lambda+\delta<1$, on peut l'écrire, pour r suffisamment grand,

$$\int_{n_0}^{n_1}=\int_{n_0}^{k\sqrt{\sigma}}+\int_{k\sqrt{\sigma}}^{n_1},$$

k étant une certaine constante, et l'on a

$$\int_{n_0}^{k\sqrt{\sigma}}(x+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}}\,x^{\lambda+\delta-1}\,dx<k\sqrt{\sigma}\,(k\sqrt{\sigma}+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}},$$

$$\begin{aligned}\int_{k\sqrt{\sigma}}^{n_1}(x+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}}\,x^{\lambda+\delta-1}\,dx&=\int_{k\sqrt{\sigma}}^{n_1}\left(1+\frac{2\sqrt{\sigma}}{x}\right)^{1-\lambda-\delta}(x+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}+\lambda+\delta-1}\,dx\\&<\left(1+\frac{2}{k}\right)^{1-\lambda-\delta}\int_{k\sqrt{\sigma}}^{n_1}(x+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}+\lambda+\delta-1}\,dx\\&<C\,\frac{(n_1+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}+\lambda+\delta}}{\sqrt{\sigma}}.\end{aligned}$$

Dans les deux cas, notre intégrale est donc inférieure à

$$\frac{C\,(n_1+2\sqrt{\sigma})^{\sqrt{\sigma}}\,n_1^{\lambda-\delta}}{\sqrt{\sigma}},$$

et, par suite,

$$|P_1|<\frac{C\varepsilon}{\sqrt{\sigma}}|c_{n_1}|\,n_1^{\lambda+\delta}\log^{\nu}n_1. \tag{42}$$

Quant à la somme P_0, c'est un polynome en z; elle vérifie donc une inégalité de la forme

$$|P_0|<C\,e^{\eta r},$$

quel que soit η positif. $\psi(\rho)$ étant positif, nos quatre limites supérieures peuvent être remplacées par celle qui figure dans (39), ce qui démontre enfin que

$$|F(z)|<C\varepsilon\,e^{r\psi(\rho)}\,\frac{r^{\lambda+\delta+\frac{1}{2}}\log^{\nu}r}{\sqrt{\sigma}\,(2\cos\rho)^{\lambda+\delta}}\quad\text{pour }\sigma\geq L. \tag{43}$$

65. Il nous reste à étudier $F(z)$ dans la bande $\lambda+\delta<\sigma\leq L$.

Remarquons que l'expression (34) des c_n peut encore s'écrire

$$c_n = (-1)^{n-1} \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{\Gamma(z+1)\,\Gamma(n-z)}{\Gamma(n)}, \tag{44}$$

d'où résulte

$$|c_n| < C\,|\sin \pi z| \frac{\left| z^{z+\frac{1}{2}} (n-z)^{n-z-\frac{1}{2}} \right|}{n^{n-\frac{1}{2}}}.$$

Mais

$$|\sin \pi z| < e^{\pi |\tau|},$$

$$\left| z^{z+\frac{1}{2}} \right| = r^{\sigma+\frac{1}{2}} e^{-|\varphi||\tau|};$$

d'autre part, pour $n \geq n_0 > L$,

$$|\arg(n-z)| < \frac{\pi}{2},$$

et l'on a

$$\left| \frac{(n-z)^{n-z-\frac{1}{2}}}{n^{n-\frac{1}{2}}} \right| = n^{-\sigma} e^{\varphi_1(n)},$$

où

$$\varphi_1(n) = \frac{1}{2}\left(n-\sigma-\frac{1}{2}\right) \log\left(1+\frac{r^2}{n^2}-\frac{2\sigma}{n}\right) - \tau \operatorname{arc\,tang} \frac{\tau}{n-\sigma}.$$

Il vient donc

$$|c_n| < C\, r^{\sigma+\frac{1}{2}} n^{-\sigma} e^{(\pi-|\varphi|)|\tau|+\varphi_1(n)}. \tag{45}$$

Or, σ restant fini, on a immédiatement

$$\frac{\pi}{2} - |\varphi| = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

ou

$$\pi - |\varphi| = |\varphi| + O\left(\frac{1}{r}\right);$$

de plus,

$$\frac{1}{2}\left(n-\sigma-\frac{1}{2}\right) \log\left(1+\frac{r^2}{n^2}-\frac{2\sigma}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(n-\sigma-\frac{1}{2}\right) \log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right) + O(1),$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{r \sin|\varphi|}{n-\sigma} - \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{n} = \operatorname{arc\,tang} \frac{n(\sin|\varphi|-1)+\sigma}{n(n-\sigma)+r^2 \sin|\varphi|} = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

car

$$1 - \sin|\varphi| = O\left(\frac{1}{r^2}\right);$$

par conséquent,

$$\tau \operatorname{arc\,tang} \frac{\tau}{n-\sigma} = |\tau| \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{n} + O(1)$$
$$= r \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{n} + O(1).$$

On peut donc remplacer (45) par l'expression plus simple

$$|c_n| < C r^{\sigma+\frac{1}{2}} n^{-\sigma} e^{\nu\tau+\varphi(n)}, \tag{46}$$

où

$$\varphi(n) = \frac{1}{2}\left(n-\sigma-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right) - r \operatorname{arc\,tang}\frac{r}{n}. \tag{47}$$

La dérivée de cette fonction de n est

$$\varphi'(n) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right) + \frac{\sigma+\frac{1}{2}}{n}\frac{r^2}{n^2+r^2},$$

qui est essentiellement positive si $n > n_0 > L$; donc $\varphi(n)$ est négative et croissante pour $n > n_0$, et tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Cela posé, n_0 étant choisi de façon que toutes ces conditions, ainsi que l'inégalité (30), soient satisfaites pour $n > n_0$, on aura

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |b_n c_n| < C\varepsilon e^{\nu\tau} r^{\sigma+\frac{1}{2}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} e^{\varphi(n)} n^{\lambda+\delta-\sigma-1}\log^{\nu} n$$
$$< C\varepsilon e^{\nu\tau} r^{\sigma+\frac{1}{2}} \int_{n_0}^{\infty} e^{\varphi(x)} x^{\lambda+\delta-\sigma-1}\log^{\nu} x\, dx. \tag{48}$$

Il s'agit d'évaluer la dernière intégrale, qui converge évidemment, d'après l'hypothèse $\sigma > \lambda + \delta$. En partageant l'intervalle d'intégration en trois, par $n_0 < n_1 < n_2$, on peut écrire

$$\int_{n_0}^{\infty} e^{\varphi(x)} x^{\lambda+\delta-\sigma-1}\log^{\nu} x\, dx < e^{\varphi(n_1)}\int_{n_0}^{n_1} + e^{\varphi(n_2)}\int_{n_1}^{n_2} + \int_{n_2}^{\infty},$$

les trois dernières intégrales étant de la forme (40), avec

$$\alpha = \sigma - \lambda - \delta > 0.$$

En tenant compte de la valeur principale trouvée pour I_ν, on voit

que l'on a

$$(49)\qquad \int_{n_0}^{\infty} e^{\varphi(x)}\, x^{\lambda+\delta-\sigma-1} \log^{\nu} x\, dx$$
$$< \frac{C}{\sigma-\lambda-\delta}\left[e^{\varphi(n_1)} + e^{\varphi(n_2)}\, n_1^{\lambda+\delta-\sigma} \log^{\nu} n_1 + n_2^{\lambda+\delta-\sigma} \log^{\nu} n_2\right].$$

Déterminons maintenant n_1 de façon que

$$e^{\varphi(n_1)} = o\left(n_1^{\lambda-\sigma}\right),$$

ce qui se réalise avec

$$n_1 = \frac{r^2}{4(\sigma-\lambda)\log r};$$

en effet,

$$r \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{n_1} = \frac{r^2}{n_1} + O\left(\frac{\log^2 r}{r^2}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(n_1 - \sigma - \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{r^2}{n_1^2}\right) = \frac{r^2}{2n_1} + O\left(\frac{\log^2 r}{r^2}\right),$$

et, par conséquent,

$$\varphi(n_1) = -2(\sigma-\lambda)\log r + O\left(\frac{\log^2 r}{r^2}\right).$$

On voit alors qu'il convient de choisir n_2 afin que

$$e^{\varphi(n_2)} = O\left(\log^{\lambda-\sigma} r\right);$$

on y arrive avec

$$n_2 = 2n_1 \frac{\log r}{\log\log r} = \frac{r^2}{2(\sigma-\lambda)\log\log r},$$

qui donne, en effet,

$$\varphi(n_2) = -\frac{r^2}{2n_2} + O\left[\frac{(\log\log r)^2}{r^2}\right] = (\lambda-\sigma)\log\log r + O\left[\frac{(\log\log r)^2}{r^2}\right].$$

Avec ce choix, (49) devient

$$\int_{n_0}^{\infty} < \frac{C\, r^{2\lambda-2\sigma}}{\sigma-\lambda-\delta}\left[1 + r^{2\delta}\log^{\nu-\delta} r + r^{2\delta}\log^{\nu} r\,(\log\log r)^{\sigma-\lambda-\delta}\right]$$
$$< \frac{C}{\sigma-\lambda-\delta}\, r^{2\lambda-2\sigma+2\delta}\log^{\nu} r\,(\log\log r)^{\sigma-\lambda-\delta}.$$

En portant cette limite supérieure dans (48), et en ajoutant le polynome $\sum_{n=1}^{n=n_0} b_n c_n$, on voit enfin que l'inégalité

$$(50)\qquad |F(z)| < \frac{C\varepsilon}{\sigma-\lambda-\delta}\, e^{\nu\tau}\, r^{2\lambda+2\delta+\frac{1}{2}-\sigma}\log^{\nu} r\,(\log\log r)^{\sigma-\lambda-\delta}$$

est satisfaite dans la bande $\lambda + \delta < \sigma \leq L$, pourvu que r soit assez grand. Cette inégalité, rapprochée de (43), nous permet d'énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Étant donnée une fonction* $F(z)$ *représentable par une série de Newton d'abscisse de convergence* λ, *si* α *est un nombre réel plus grand que* λ, *on a*

$$(51) \qquad |F(\alpha + re^{i\varphi})| \leq e^{r\psi(\varphi)} \frac{r^{\lambda+\frac{1}{2}+\varepsilon(r)}}{\sqrt{1+r\cos\varphi}}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$\varepsilon(r)$ *désignant une fonction qui tend uniformément vers zéro quand* z *s'éloigne indéfiniment dans l'angle* $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

THÉORÈME II. — *Si la série converge en un point de la droite de convergence* $\sigma = \lambda$, *on a*

$$(52) \qquad |F(\alpha + re^{i\varphi})| \leq e^{r\psi(\varphi)} \frac{r^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+r\cos\varphi}} \varepsilon(r), \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

avec la même condition pour $\varepsilon(r)$.

Nous avons même démontré quelque chose de plus, savoir que

$$|F(z)| \qquad \varepsilon(r) e^{\frac{\pi}{2}|\tau|} r^{2\lambda+\frac{1}{2}-\sigma} \log^{\nu} r (\log\log r)^{\sigma-\lambda}, \qquad \alpha \leq \sigma \leq L,$$

où $\nu = 0$ si $\lambda \neq 0$ et $\nu = 1$ si $\lambda = 0$.

THÉORÈME III. — *Si les coefficients de la série* (1) *satisfont à l'inégalité*

$$\left| \sum_{s=0}^{s=n} a_s \right| < C n^{\lambda} \log^{\nu} n, \qquad \nu \geq 0,$$

si $\lambda \geq 0$, *ou à l'inégalité*

$$\left| \sum_{s=n}^{\infty} a_s \right| < C n^{\lambda} \log^{\nu} n, \qquad \nu \geq 0,$$

si $\lambda < 0$, *on a*

$$F(\alpha + re^{i\varphi}) < C e^{r\psi(\varphi)} \frac{r^{\lambda+\frac{1}{2}} \log^{\nu} r}{\sqrt{1+r\cos\varphi}}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

On a même démontré que

$$|F(z)| < C e^{\frac{\pi}{2}|\tau|} r^{2\lambda+\frac{1}{2}-\sigma} \log^{\nu} r (\log\log r)^{\sigma-\lambda}, \qquad \alpha \leqq \sigma \leqq L.$$

VII. — Fonctions développables en série de Newton.

66. Proposons-nous maintenant le problème inverse : déterminer le domaine de convergence d'une série de Newton connaissant certaines propriétés analytiques de la fonction qu'elle représente. En conservant les mêmes notations, nous allons démontrer que

Si une fonction analytique $F(z)$, *holomorphe dans le demi-plan* $\sigma \geqq \alpha$, *y satisfait à l'inégalité*

$$|F(\alpha + re^{i\nu})| < e^{r\psi(\nu)}(1+r)^{\beta+\varepsilon(r)}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \nu \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{53}$$

où la fonction $\varepsilon(r)$ *tend uniformément vers zéro quand* r *augmente indéfiniment, elle admet un développement de la forme* (1), *dont l'abscisse de convergence est inférieure ou égale au plus grand des nombres* [1] α, $\beta + \frac{1}{2}$.

Il nous faut démontrer que le terme complémentaire R_n du développement réduit de $F(z)$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Nous l'étudierons sous la forme de l'intégrale de Cauchy (24) (§ 6)

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)}{(\zeta-1)(\zeta-2)\ldots(\zeta-n)} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

le chemin d'intégration, parcouru dans le sens positif, étant situé dans le demi-plan $\mathcal{R}(\zeta) \geqq \alpha$, et entourant le point z, ainsi que ceux des points $1, 2, \ldots, n$ qui se trouvent dans ce demi-plan. Il y a évidemment intérêt à choisir ce chemin de façon que le facteur $\left|\frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)}{(\zeta-1)(\zeta-2)\ldots(\zeta-n)}\right|$ soit aussi petit que possible.

---

[1] F. Carlson [1], p. 53, a démontré un théorème voisin de celui que nous énonçons, mais qui ne donne, pour limite supérieure de l'abscisse de convergence, que le plus grand des deux nombres α, $\beta + 1$. Notre démonstration est, d'ailleurs toute différente de celle de cet auteur.

Or, quand ζ s'éloigne à l'infini, la valeur inverse de ce rapport est, au facteur $n^{\alpha-\sigma}$ près, asymptotique à ce que nous avons appelé $|c_n|$, mais dans lequel z aurait été remplacé par $\zeta-\alpha$. Nous savons que si $\zeta-\alpha=re^{i\varphi}$, le maximum de $|c_n|$ est $|c_{\bar{n}}|$, d'indice $\bar{n}=\frac{r}{2\cos\varphi}$, ce qui nous conduit à intégrer le long du lieu des points pour lesquels

$$n=\frac{r}{2\cos\varphi}.$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon n et de centre $\zeta-\alpha=n$. En remplaçant ζ par $\zeta+\alpha$, on peut alors écrire R_n sous l'une ou l'autre des formes

$$(54)\quad R_n=\frac{1}{2\pi i}\frac{(-1)^n}{\Gamma(1-z)}\int\frac{\Gamma(n+1-z)\,\Gamma(\alpha+\zeta-n)}{\Gamma(\alpha+\zeta)}\frac{F(\alpha+\zeta)}{\zeta-(z-\alpha)}\,d\zeta$$

$$(54')\quad =\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Gamma(1-z)}\int\frac{\Gamma(n+1-z)\,\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)}\frac{F(\alpha+\zeta)}{\zeta-(z-\alpha)}\,d\zeta,$$

le chemin d'intégration étant maintenant un cercle de centre $\zeta=n$, et de rayon n. On a donc, sur la ligne d'intégration,

$$\zeta=2n\cos\varphi\,e^{i\varphi},$$

et ζ parcourt cette ligne quand φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Comme $\sigma>\alpha$, on peut toujours choisir n assez grand pour que le point $z-\alpha$ soit intérieur à ce cercle. Si, en particulier, α est un entier positif, le point $\zeta=0$ est un pôle pour la fonction sous le signe; on l'évitera alors par un demi-cercle de centre $\zeta=0$, et assez petit pour que $F(\alpha+\zeta)$ soit holomorphe sur sa circonférence et à son intérieur.

Notre chemin d'intégration est donc le cercle OCABO, ou, si α est un entier positif, la courbe EFCABDE.

Nous distinguerons encore les points ζ de valeur absolue supérieure à $\log n$; nous décomposerons ainsi R_n en deux intégrales

$$R_n=Q_n+P_n,$$

Q_n étant étendue à l'arc CAB, et P_n à l'arc BOC ou BDEFC, et les points B et C ayant l'argument $\pm\varphi_n$ défini par

$$\cos\varphi_n=\frac{\log n}{2n}.$$

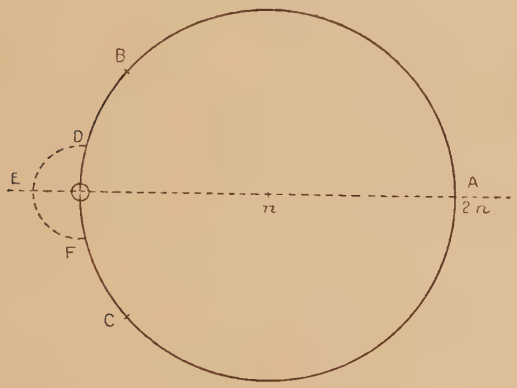
φ_n tend donc vers $\frac{\pi}{2}$ quand n augmente indéfiniment, et l'on a, en outre, pour $n > 1$,

$$0 < \frac{\pi}{2} - \varphi_n < \frac{\log n}{n}.$$

Si ζ est un point de l'arc CAB, remarquons que

$$\frac{\Gamma(n+1-z)\,\Gamma(\alpha+\zeta-n)}{\Gamma(\alpha+\zeta)} = \frac{1}{c_n}\,\frac{\alpha+\zeta}{\alpha+\zeta-n}\,\frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(n)},$$

Fig. 10.



c_n étant l'expression (34) où z est remplacé par $\alpha + \zeta$. Mais alors, le même calcul qu'au paragraphe 63 nous donnerait

$$\left|\frac{1}{c_n}\right| < C\, r^{-\frac{1}{2}} e^{-r\psi(\rho)} \left|\frac{\zeta+\alpha-n}{\zeta+\alpha}\right|^{\alpha};$$

d'autre part,

$$\frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(n)} < C n^{1-\sigma},$$

$$\left|\frac{\zeta+\alpha}{\zeta+\alpha-n}\right|^{1-\alpha} < C(\cos\rho)^{1-\alpha},$$

d'où résulte enfin

$$\left|\frac{\Gamma(n+1-z)\,\Gamma(\alpha+\zeta-n)}{\Gamma(\alpha+\zeta)}\right| < C n^{\frac{1}{2}-\sigma} (\cos\rho)^{\frac{1}{2}-\alpha} e^{-2n\cos\rho\psi(\rho)}.$$

En remarquant que, sur l'arc CAB,

$$\left|\frac{d\zeta}{d\rho}\right| = 2n,$$

on voit sur l'expression (54) que Q_n vérifie l'inégalité

$$|Q_n| < C n^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{-\nu_n}^{+\nu_n} (\cos\nu)^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{-2n\cos\nu\psi(\nu)} |F(\alpha+2n\cos\nu e^{i\nu})| d\nu.$$

En tenant compte de (53), on en déduit

$$|Q_n| < C n^{\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon-\sigma} \int_0^{\nu_n} (\cos\nu)^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} d\nu.$$

Il suffit évidemment d'évaluer

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\nu_n} (\cos\nu)^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} d\nu < 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\nu_n} (\cos\nu)^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} \sin\nu\, d\nu$$

$$< C\left[1-\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\alpha-\beta-\varepsilon-\frac{1}{2}}\right],$$

de sorte qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$|Q_n| < C_1 n^{\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon-\sigma} + C_2 n^{\alpha-\sigma} \log n^{\alpha-\beta-\varepsilon-\frac{1}{2}}.$$

ε étant arbitrairement petit, on aura donc

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = 0,$$

pourvu que σ soit supérieur à α et $\beta+\frac{1}{2}$.

Pour P_n, posons $\zeta = \xi + i\eta$, et remarquons que ξ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Écrivons donc

$$\frac{\Gamma(n+1-z)\,\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\zeta+\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+\zeta+1)} \frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(1+\zeta+\alpha)\,\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(1+n-\zeta-\alpha)\,\Gamma(\zeta+\alpha-n)};$$

la première fraction du second membre est $\frac{1}{c_{n+1}}$, où z serait remplacé par $\zeta+\alpha$, et le même calcul que dans le paragraphe 65 donnerait

$$\left|\frac{1}{c_{n+1}}\right| < C r^{-\xi-\alpha-\frac{1}{2}} n^{\xi+\alpha} e^{\pi\eta}.$$

Mais

$$\rho\eta = \frac{\pi}{2}|\eta| - \left(\frac{\pi}{2} - |\rho|\right)|\eta| = \frac{\pi}{2}|\eta| + O\left[\frac{(\log n)^2}{n}\right],$$

$$n^{\xi} < e^{\frac{(\log n)^2}{n}} < C;$$

d'autre part,

$$\left|\frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(n+1)}\right| < C n^{-\sigma},$$

$$\left|\frac{\Gamma(1+\zeta+\alpha)\,\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(1+n-\zeta-\alpha)\,\Gamma(\zeta+\alpha-n)}\right| = |\zeta+\alpha| < Cr,$$

donc on a

$$\left|\frac{\Gamma(n+1-z)\,\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)}\right| < C n^{\alpha-\sigma}(1+\log n)^{1-\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}|\eta|},$$

quel que soit ζ sur l'arc BOC. On aura encore

$$|F(\alpha + r e^{i\rho})| < e^{r\rho\sin\rho}(1+r)^{\beta+\varepsilon}$$
$$< e^{\frac{\pi}{2}|\eta|}(1+\log n)^{\beta+\varepsilon},$$

et l'expression (54′) donne enfin, pour P_n,

$$|P_n| < C n^{\alpha+1-\sigma}(1+\log n)^{\beta+1-\varepsilon-\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \rho_n\right)$$
$$< C n^{\alpha-\sigma}\ (1+\log n)^{\beta+2-\alpha-\varepsilon},$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, si $\sigma > \alpha$.

67. Posons

$$h(\rho) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|F(\alpha + r e^{i\rho})|}{r}. \tag{55}$$

Si $F(z)$ est développable en série de Newton, nous savons, d'après le paragraphe 65, que l'on a nécessairement

$$h(\rho) \leqq \psi(\rho),$$

et le dernier paragraphe nous apprend que si

$$h(\rho) < \psi(\rho), \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \rho \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{56}$$

l'abscisse de convergence de la série réduite relative à $F(z)$ est au

plus égale à α. C'est α si $F(z)$ a un point singulier sur la droite $\sigma = \alpha$. *Dans ce cas, l'abscisse de convergence est donc le plus petit nombre* λ *tel que* $F(z)$ *soit holomorphe pour* $\sigma > \lambda$.

Si $h(\varphi) = \psi(\varphi)$ pour une infinité de valeurs de φ, nous n'avons rien à ajouter à ce que nous venons de dire. Mais il arrive assez souvent que $h(\varphi)$ n'atteint sa limite supérieure qu'en un nombre fini de points, à l'intérieur de l'intervalle, et l'on peut alors préciser la condition de convergence.

Pour montrer d'abord que cette circonstance est possible, considérons la fonction exponentielle

$$F(z) = t^z.$$

Si $|t-1| < 1$, la condition (56) est satisfaite, et la série converge dans tout le plan; si $|t-1| > 1$, $h(\varphi)$ surpasse $\psi(\varphi)$ pour certaines valeurs de φ, donc $\lambda = \infty$. Enfin, si $|t-1| = 1$, on voit facilement que $h(\varphi)$ est inférieur à $\psi(\varphi)$, sauf en un point où les deux courbes représentatives sont tangentes. En effet, en posant

$$t = 1 + e^{2i\theta}, \qquad z = r e^{i\varphi},$$

il vient

$$|t^z| = e^{r\lambda(\theta,\varphi)},$$

où

$$\lambda(\theta, \varphi) = \cos\varphi \log(2\cos\theta) - \theta \sin\varphi.$$

Admettons que $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. On voit facilement que $\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}$ ne s'annule qu'en un seul point de l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, à savoir $\theta = -\varphi$, où $\lambda(\theta, \varphi)$ prend la valeur maximum $\psi(\varphi)$. On a donc $\lambda(\theta, \varphi) \leq \psi(\varphi)$, l'égalité n'ayant lieu que pour $\theta = -\varphi$. Soit alors γ un point de l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, et posons

$$\mu(\varphi) = \lambda(-\gamma, \varphi).$$

D'après ce qui précède, on a

$$\mu(\gamma) = \psi(\gamma), \qquad \text{avec } \mu(\varphi) < \psi(\varphi)$$

pour toute autre valeur de φ. En outre, on vérifie facilement que

$$(57) \qquad \begin{cases} \mu'(\gamma) = \psi'(\gamma) \\ \mu''(\gamma) = \psi''(\gamma) - \dfrac{1}{\cos\gamma}. \end{cases}$$

Cela posé, admettons que $F(z)$ soit une fonction analytique holomorphe pour $\sigma \geq \alpha$, satisfaisant à l'inégalité

$$|F(\alpha + re^{i\nu})| < e^{r\mu(\nu)}(1+r)^{\beta+\varepsilon(r)}$$

dans le voisinage immédiat de $\nu = \gamma$, et telle que pour toute autre valeur de ν, on ait

$$h(\nu) < \psi(\nu).$$

Le terme complémentaire R_n tend évidemment vers zéro, sauf peut-être la portion

$$Q'_n = n^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} (\cos\nu)^{\frac{1}{2}-\alpha} e^{-r\psi(\nu)} |F(\alpha + re^{i\nu})| \, d\nu,$$

η étant assez petit, et n assez grand, pour que l'arc $(\gamma - \eta, \gamma + \eta_1)$ soit tout entier sur l'arc de cercle CAB. Mais on a immédiatement

$$Q'_n < C n^{\frac{1}{2}-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} e^{-r[\psi(\nu)-\mu(\nu)]} \, d\nu;$$

comme, d'après (57), on a, dans l'intervalle d'intégration,

$$\psi(\nu) - \mu(\nu) > C(\nu - \gamma)^2,$$

il vient

$$Q'_n < C n^{-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} e^{-Cn(\nu-\gamma)^2} \sqrt{n} \, d\nu$$

$$= C n^{-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{-\eta\sqrt{n}}^{+\eta\sqrt{n}} e^{-Cu^2} \, du < C n^{-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Cu^2} \, du,$$

qui tend vers zéro si $\sigma > \beta$.

La série (1) *sera donc convergente pour* $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta$. Il va sans dire que ce raisonnement s'applique encore s'il y a, à l'intérieur de l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{\pi}{2}$, un nombre fini de points γ de la nature susdite. En rapprochant ce résultat de l'inégalité (51), nous voyons que notre condition est aussi précise que possible, et nous permet, dans le cas actuel, de déterminer l'abscisse de convergence. Celle-ci dépend uniquement de certaines propriétés analytiques simples de la fonction $F(z)$, savoir les affixes de ses points singuliers, et son ordre de grandeur dans le demi-plan en question.

Si $h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, avec $h(\nu) < \psi(\nu)$ dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{\pi}{2}$,

le théorème précédent ne s'applique pas (1). Cependant, si $\beta + \frac{1}{2} > \alpha$, le théorème général du paragraphe 66 nous permet d'affirmer que

$$\lambda \leq \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right).$$

En effet, ρ étant un nombre positif, (53) entraîne

$$|F(\alpha + \rho + i\tau)| < C e^{\frac{\pi}{2}|\tau|} |\tau|^{\beta+\varepsilon-\rho},$$

et il suffit de prendre ρ tel que

$$\alpha + \rho = \beta - \rho + \frac{1}{2}.$$

68. Considérons, à titre d'exemple, la fonction

$$a^z z^\beta.$$

Si $|a-1|<1$, on a $h(\varphi)<\psi(\varphi)$, et la série de Newton converge pour $\sigma > 0$. $z = 0$ étant en général un point singulier, on aura $\lambda = 0$, sauf si β est entier non négatif, dans quel cas $\lambda = -\infty$. Si $|a-1| = 1$, et $a \neq 0$, nous sommes dans le cas du paragraphe précédent, et λ est le plus grand des deux nombres $\mathcal{R}(\beta)$ et 0.

Si $\beta = 0$, cette fonction se réduit à a^z, et l'on peut former immédiatement son développement de Newton

$$a^z = a \sum_{s=0}^{\infty} (a-1)^s \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!}. \tag{58}$$

L'abscisse de convergence est $\lambda = 0$, si $|a-1| = 1$, $a \neq 0$, mais on peut facilement représenter cette fonction par une série d'abscisse de convergence arbitraire $\lambda = -\rho$; il suffit de la simple transformation

$$a^z = a^{1-\rho} \sum_{s=0}^{\infty} (a-1)^s \frac{(z+\rho-1)(z+\rho-2)\dots(z+\rho-s)}{s!}.$$

Cette simple remarque montre qu'on peut parfois augmenter le

(1) Il serait intéressant d'étudier les conditions de convergence dans ce cas, que nous avons dû écarter de notre démonstration, $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ étant des points singuliers de la fonction $\psi(\varphi)$.

domaine de convergence de la série de Newton par le changement de variable $(z, z+\rho)$, ρ étant positif.

Considérons, en second lieu, la fonction entière

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{i\gamma(\log t)^2} dt, \tag{59}$$

γ étant un nombre positif. Pour trouver la fonction $h(\varphi)$ correspondante, posons $t = e^{-\zeta}$. Il vient

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-z\zeta + i\gamma\zeta^2} d\zeta.$$

Admettons pour un moment que z soit > 0. On ne change pas la valeur de cette intégrale en déformant la ligne d'intégration jusqu'à un rayon vecteur d'argument $\pm\frac{\pi}{4}$. Posons donc $\zeta = \xi\sqrt{\frac{i}{\gamma}}$. On trouve alors

$$F(z) = \sqrt{\frac{i}{\gamma}} \int_0^\infty e^{-z\xi\sqrt{\frac{i}{\gamma}} - \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{i}{\gamma}}\, e^{x^2} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi,$$

où

$$x = \frac{z}{2}\sqrt{\frac{i}{\gamma}}.$$

Cette expression montre d'abord que $F(z)$ est une fonction entière. Il convient maintenant d'étudier l'intégrale de Laplace

$$L(x) = \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi;$$

on peut aisément en donner cette autre expression

$$L(x) = e^{-x^2} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2} d\xi}{x^2 + \xi^2},$$

valable pour $\mathcal{R}(x) > 0$. En développant suivant les puissances décroissantes de x, on trouve le développement asymptotique

$$L(x) = \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) x^{-2s-1} + R_n \right],$$

valable dans l'angle $-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}$. On a donc, asymptoti-

quement, dans cet angle,

$$L(x) \sim \frac{1}{2x} e^{-x^2}. \tag{60}$$

Pour l'angle $\frac{3\pi}{4} \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{4}$, remarquons que

$$L(x) + L(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi},$$

ce qui donne asymptotiquement dans cet angle

$$L(x) \sim \sqrt{\pi} + \frac{1}{2x} e^{-x^2}.$$

Si nous revenons à $F(z)$, il résulte de (60) que

$$\lim_{z \to \infty} z F(z) = 1,$$

z tendant vers l'infini le long d'un rayon vecteur situé dans l'angle $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Mais dans l'angle $\frac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq \pi$, on a asymptotiquement

$$(z) \sim \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{i\pi}{\gamma}} e^{\frac{iz^2}{4\gamma}}. \tag{61}$$

En prenant alors

$$\alpha = -\pi\gamma + \varepsilon,$$

ε étant un nombre arbitrairement petit, on a

$$h(\varphi) = 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < \frac{\pi}{2},$$
$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2\gamma}.$$

Par conséquent, si ε est positif, $h(\varphi) < \psi(\varphi)$ dans l'angle

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \quad \frac{\pi}{2},$$

et la série de Newton qui représente $F(z)$ converge pour $\sigma > \alpha$; au contraire, si ε est négatif, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, et la série diverge pour $\sigma < -\pi\gamma$. Elle admet donc l'abscisse de convergence $\lambda = -\pi\gamma$.

Soit ω un nombre positif. On déduit de (61) que

$$F(\omega z) \sim \frac{1}{\omega z} + \sqrt{\frac{i\pi}{\gamma}} e^{\frac{i\omega^2 z^2}{4\gamma}}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq \pi,$$

donc $F(\omega z)$ admet un développement de Newton

$$F(\omega z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!},$$

d'abscisse de convergence $\leq \frac{\pi\gamma}{\omega^2}$. Par conséquent, la fonction $F(z)$, définie par l'intégrale (59), se représente par la série de Newton.

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{(z-\omega)(z-2\omega)\dots(z-s\omega)}{s!},$$

dont l'abscisse de convergence (1) est $\leq \frac{\pi\gamma}{\omega}$. On peut donc prolonger analytiquement la fonction dans tout le plan en prenant ω suffisamment petit.

VIII. — Prolongement analytique.

69. Les deux exemples que nous venons de donner montrent que les deux transformations linéaires $(z, z+\rho)$ et $\left(z, \frac{z}{\omega}\right)$ permettent parfois d'augmenter le domaine de convergence de la série de Newton. D'une manière générale, considérons une fonction $F(z)$ holomorphe pour $\sigma \geq \alpha$, et satisfaisant à la condition (53). Nous savons qu'elle est représentable par une série (1), convergente pour $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2}$. ρ étant un nombre réel, formons la fonction

$$F_1(z) = F(z-\rho).$$

En posant $\bar{\alpha} = \alpha + \rho$, (53) entraîne

$$|F_1(\bar{\alpha} + re^{i\nu})| < e^{r\psi(\nu)}(1+r)^{\beta+\varepsilon},$$

et $F_1(z)$ est holomorphe pour $\sigma \geq \bar{\alpha}$; elle admet donc un développement de la forme

$$F_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \binom{z-1}{s},$$

---

(1) C'est-à-dire que la série converge ou non suivant que

$$\sigma > -\frac{\pi\gamma}{\omega} \text{ ou } \sigma < -\frac{\pi\gamma}{\omega}.$$

qui converge pour $\sigma > \bar{\alpha}$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2}$. C'est-à-dire que

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{z+\rho-1}{s}, \tag{62}$$

et cette série converge pour $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2} - \rho$. On peut donc choisir ρ de façon qu'elle converge pour $\sigma > \alpha$. (62) subsiste d'ailleurs si ρ est complexe, mais alors ρ doit être remplacé, dans les inégalités, par sa partie réelle.

Il nous suffit de supposer ρ réel. Soit α_0 le plus petit nombre tel que $F(z)$ soit holomorphe pour (1) $\sigma > \alpha_0$, et soit λ_ρ l'abscisse de convergence (2) de (62). Si α est suffisamment grand, la fonction $F(z)$ satisfait à une inégalité de la forme (53). α étant fixé, cette inégalité est satisfaite pour certaines valeurs de β; nous désignerons leur borne inférieure par $\mu(\alpha)$.

$\mu(\alpha)$ est évidemment une fonction non croissante de α, et continue dans tout intervalle où elle reste finie. Diverses circonstances peuvent alors se présenter :

1° $\mu(\alpha) = -\infty$ pour $\alpha \geq \alpha_0$; on a $\lambda_\rho = \alpha_0$ quel que soit ρ.

2° $\mu(\alpha)$ est finie pour $\alpha > \alpha_0$. Nous aurons l'inégalité la plus précise en choisissant α de façon que

$$\mu(\alpha) + \frac{1}{2} - \alpha = \rho.$$

Le premier membre étant une fonction décroissante de α, cette équation définit α comme fonction de ρ. La fonction $\alpha(\rho)$ est décroissante pour $\rho < \mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0$, et tend vers α_0 quand ρ tend vers $\mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0$. De la comparaison des expressions (51) et (53), on conclut que $\lambda_\rho + \frac{1}{2} \geq \mu(\alpha) - \rho$, et, par suite,

$$\alpha(\rho) - 1 \leq \lambda_\rho \leq \alpha(\rho) \quad \text{pour} \quad \rho < \mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0,$$

$$\lambda_\rho = \alpha_0 \quad \text{pour} \quad \rho \geq \mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0.$$

---

(1) Si la fonction est entière, on aura $\alpha_0 = -\infty$.

(2) C'est-à-dire que la série (62) converge ou non suivant que $\sigma > \lambda_\rho$ ou $\sigma < \lambda_\rho$.

En prenant ρ suffisamment grand, la série (62) sera donc convergente dans le plus grand demi-plan où $F(z)$ est holomorphe.

3° Admettons maintenant que $\mu(\alpha)$ ne soit pas bornée supérieurement pour $\alpha \geq \alpha_0$. Il existe un nombre $\alpha_1 \geq \alpha_0$ tel que, pour $\sigma \geq \alpha_1 + \varepsilon$, $F(z)$ est holomorphe et $\mu(\sigma)$ est finie, alors que l'une au moins de ces conditions cesse d'être satisfaite pour $\sigma \geq \alpha_1 - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε. $\mu(\alpha)$ peut tendre vers une limite finie ou vers l'infini quand α tend vers α_1 en décroissant.

Dans le premier cas, on trouve de la même façon que précédemment

$$\alpha(\rho) - 1 \leq \lambda_\rho \leq \alpha(\rho) \qquad \text{pour} \qquad \rho < \mu(\alpha_1 + 0) + \frac{1}{2} - \alpha_1,$$

$$\lambda_\rho = \alpha_1 \qquad \text{pour} \qquad \rho \geq \mu(\alpha_1 + 0) + \frac{1}{2} - \alpha_1.$$

Quel que soit ρ, (62) diverge dans la bande $\alpha_0 < \sigma < \alpha_1$.

Dans le second cas, la fonction décroissante $\alpha(\rho)$ tend vers α_1 quand ρ augmente indéfiniment, et l'on a toujours

$$\alpha_1 < \lambda_\rho \leq \alpha(\rho);$$

λ_ρ tend donc vers α_1 sans jamais l'atteindre.

Diverses autres circonstances peuvent se présenter. Posons, comme plus haut,

$$h_\alpha(\varphi) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |F(\alpha + re^{i\varphi})|}{r}. \tag{63}$$

Si $h_\alpha\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ pour $\alpha > \alpha_1$, $\mu(\alpha)$ est constant pour $\alpha > \alpha_1$; car si $\alpha_1 < \alpha' < \alpha''$, les valeurs de β relatives à α' et α'' ne pourraient différer que du fait des points à l'infini de la bande $\alpha' \leq \sigma < \alpha''$, pour lesquels on a $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. μ étant cette valeur constante, $\alpha(\rho)$ se réduit à la fonction linéaire

$$\alpha(\rho) = \mu + \frac{1}{2} - \rho,$$

et l'on a

$$\mu - \rho \leq \lambda_\rho \leq \mu + \frac{1}{2} - \rho \qquad \text{pour} \qquad \rho < \mu + \frac{1}{2} - \alpha_1,$$

$$\lambda_\rho = \alpha_1 \qquad \text{pour} \qquad \rho \geq \mu + \frac{1}{2} - \alpha_1.$$

Si de plus $h_\alpha(\varphi) < \psi(\varphi)$, en exceptant un nombre fini de

points γ de la nature indiquée au paragraphe 67, il résulte de l'analyse de ce paragraphe que

$$\lambda_\rho = \mu - \rho \qquad \text{pour} \qquad \rho < \mu - \alpha_1,$$
$$\lambda_\rho = \alpha_1 \qquad \text{pour} \qquad \rho \geq \mu - \alpha_1.$$

La série (62) diverge, quel que soit ρ, dans la bande $\alpha_0 < \sigma < \alpha_1$, et pour obtenir le prolongement de $F(z)$ dans cette bande, nous allons avoir recours à la seconde transformation $\left(z, \frac{z}{\omega}\right)$.

70. Soit d'abord ω positif et plus petit que 1. Il résulte de la définition de $h_\alpha(\varphi)$ que

$$|F(\alpha + \omega r e^{i\varphi})| < e^{\omega r[h_\alpha(\varphi)+\varepsilon]},$$

et, pour $\alpha > \alpha_1$, on a

$$h_\alpha(\varphi) \leq \psi(\varphi) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$\psi(\varphi)$ étant positif, il en résulte

$$\omega h_\alpha(\varphi) < \psi(\varphi),$$

le signe d'égalité étant exclu. $F(\omega z)$ admet donc un développement de la forme

$$F(\omega z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \binom{z-1}{s},$$

qui converge pour $\sigma > \frac{\alpha_1}{\omega}$. En remplaçant z par $\frac{z}{\omega}$, on voit donc que *toute fonction représentable par une série de Newton admet* a fortiori *un développement de la forme*

$$(64) \qquad F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{(z-\omega)(z-2\omega)\ldots(z-s\omega)}{s!}, \qquad 0 < \omega < 1,$$

et ce que nous venons de dire montre que l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ de ce développement est une fonction non décroissante de ω, avec

$$(65) \qquad \alpha_0 \leq \lambda(\omega) \leq \alpha_1 \leq \lambda(1).$$

Quand ω tend vers zéro, $\lambda(\omega)$ tend donc vers une limite supérieure ou égale à α_0, et cette abscisse limite se rattache à une

propriété analytique de $F(z)$. Considérons cette fonction sur une droite $\mathcal{R}(z) = \sigma$. Si σ est assez grand, on a

$$|F(\sigma + i\tau)| = O(e^{k|\tau|}),$$

et la borne inférieure $\xi(\sigma)$ des nombres k, pour lesquels cette équation est satisfaite, est comprise dans l'intervalle (1)

$$0 \leqq \xi(\sigma) \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad \sigma > \alpha_1. \tag{66}$$

La dernière de ces inégalités résulte de $\psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, et la première est une conséquence du théorème de E. Phragmén et E. Lindelöf, dont nous avons fait usage dans le paragraphe 18.

Dans l'intervalle $\alpha_0 < \sigma < \alpha_1$, $\xi(\sigma)$ n'est pas nécessairement bornée, et il existe un nombre α'_0, avec $\alpha_0 \leqq \alpha'_0 \leqq \alpha_1$, tel que, pour $\sigma \geqq \alpha'_0 + \varepsilon$, $F(z)$ soit holomorphe et $\xi(\sigma)$ soit bornée supérieurement, l'une au moins de ces conditions cessant d'être remplie pour $\sigma \geqq \alpha'_0 - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε. Si $\alpha'_0 = \alpha_1$, $\lambda(\omega) = \alpha_1$ quelque petit que soit ω, et notre transformation ne sert à rien.

Supposons donc $\alpha'_0 < \alpha_1$. Par définition, $\xi(\sigma) \geqq \frac{\pi}{2}$ en un point au moins de l'intervalle $\alpha_1 - \varepsilon \leqq \sigma \leqq \alpha_1$. Il résulte alors d'une analyse due à E. Lindelöf (2) qu'il existe un nombre β tel que la fonction $\xi(\sigma)$ est positive, décroissante, continue et convexe pour $\alpha'_0 < \sigma < \beta$, tandis qu'elle est constante pour $\sigma \geqq \beta$.

De la non-croissance de $\xi(\sigma)$ et de sa continuité, on déduit

$$\xi(\sigma) \geqq \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad \alpha'_0 < \sigma < \alpha_1,$$

$$\xi(\alpha_1) = \frac{\pi}{2}.$$

---

(1) Dans le premier exemple du paragraphe 68, $\xi(\sigma)$ est une constante, qui peut, d'ailleurs, prendre une valeur quelconque entre ces limites. Dans le second, on a $\xi(\sigma) = -\frac{\sigma}{2\gamma}$, et $\alpha_1 = -\pi\gamma$.

(2) *Quelques remarques sur la croissance de la fonction* $\zeta(s)$ (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. XXXII, 1908, p. 341-356).

G.-H. Hardy s'est servi récemment de cette analyse dans un cas peu différent du nôtre : *The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series* (*Quart. J. pure appl. math.*, t. XLVII, 1916, p. 178-180).

En désignant par α'_1 le plus petit des nombres α_1 et β, on aura donc

$$\alpha_0 \leqq \alpha'_0 \leqq \alpha'_1 \leqq \alpha_1,$$

et, dans l'intervalle $\alpha'_0 < \sigma < \alpha'_1$, $\xi(\sigma)$ est décroissante jusqu'à

$$\xi(\alpha'_1) = \frac{\pi}{2}.$$

Si $\alpha'_1 < \alpha_1$, $\xi(\sigma)$ reste constante et égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $\sigma > \alpha'_1$. Mais si $\alpha'_1 = \alpha_1 < \beta$, $\xi(\sigma)$ décroît encore dans l'intervalle $\alpha'_1 < \sigma < \beta$, et, pour $\sigma \geqq \beta$, elle reste constamment égale à $\xi(\beta)$ avec

$$0 \leqq \xi(\beta) \leqq \frac{\pi}{2}.$$

$\xi(\beta)$ peut d'ailleurs avoir une valeur quelconque dans cet intervalle. Si $\beta = \infty$, $\xi(\sigma)$ est toujours décroissante..

Il résulte de notre analyse que l'équation

$$\xi(\sigma) = \frac{\pi}{2\omega}, \qquad 0 < \omega < 1 \tag{67}$$

détermine uniquement σ comme fonction de ω. $\xi(\sigma)$ est définie pour $\sigma \geqq \alpha'_0$, et, quand σ décroît et tend vers α'_0, elle tend vers une limite ξ_0 finie ou non. En posant

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\xi_0} \geqq 0,$$

on voit qu'à chaque valeur de ω dans l'intervalle $\omega_0 < \omega < 1$, correspond une et une seule valeur de σ dans l'intervalle $\alpha'_0 < \sigma < \alpha'_1$.

Ces préliminaires posés, reprenons la série (64), et déterminons son abscisse de convergence $\lambda(\omega)$. Pour fixer les idées, supposons qu'elle converge pour $\omega = 1$, et que $\alpha'_0 < \alpha_1$. Si $\sigma > \alpha_1$, on a donc

$$h_\sigma(\rho) \leqq \psi(\rho) \qquad \text{pour} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \rho \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Soit $\omega_0 < \omega < 1$, et soit σ_ω la valeur de σ définie par l'équation (67). Si $\sigma > \sigma_\omega$, on a $\xi(\sigma) < \frac{\pi}{2\omega}$, et il existe un nombre positif ε tel que

$$|F(\sigma + i\tau)| < e^{\left(\frac{\pi}{2\omega} - \varepsilon\right)|\tau|},$$

pour toute valeur de $|\tau|$ suffisamment grand. On en conclut que

$$h_\sigma(\varphi) < \frac{\psi(\varphi)}{\omega} \qquad \text{si} \qquad \sigma > \sigma_\omega,$$

et, par suite, que (64) converge pour $\sigma > \sigma_\omega$. Par contre, si $\sigma < \sigma_\omega$, on a $\xi(\sigma) > \frac{\pi}{2\omega}$, et l'on peut trouver un nombre positif ε tel que

$$|F(\sigma + i\tau)| > e^{\left(\frac{\pi}{2\omega} + \varepsilon\right)|\tau|}$$

pour une infinité de valeurs de $|\tau|$ indéfiniment croissantes; donc $h_\sigma(\varphi)$ surpasse $\frac{1}{\omega}\psi(\varphi)$ en l'un des points $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, et (64) diverge pour $\sigma < \sigma_\omega$.

Par suite,

$$\lambda(\omega) = \sigma_\omega$$

pour toute valeur ω de l'intervalle $\omega_0 < \omega < 1$. Quand ω tend en décroissant vers ω_0, $\lambda(\omega)$ tend vers α'_0.

Enfin, si $0 < \bar{\omega} < \omega_0$, la non-décroissance de $\lambda(\omega)$ entraîne

$$\lambda(\omega) \leqq \lambda(\omega_0) = \alpha'_0,$$

et, comme, par définition, (64) diverge pour $\sigma < \alpha'_0$, on a

$$\lambda(\omega) = \alpha'_0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < \omega \leqq \omega_0.$$

La fonction $\lambda(\omega)$ est donc entièrement déterminée par l'équation

$$\xi[\lambda(\omega)] = \frac{\pi}{2\omega},$$

et les propriétés de la fonction ξ montrent que $\lambda(\omega)$ est croissante et continue à l'intérieur de l'intervalle $\omega_0 < \omega < 1$. Mais elle est discontinue pour $\omega = 1$, car elle tend vers α'_1 quand ω tend vers 1, et nous avons vu qu'en général

$$\alpha'_1 < \lambda(1) = \lambda.$$

Par conséquent, quand ω décroît à partir de 1, l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ fait d'abord un saut brusque, puis décroît continuellement jusqu'à ce que ω atteigne ω_0, et enfin reste constante et égale à α'_0 dans l'intervalle $0 < \omega \leqq \omega_0$. Si $\omega_0 = 0$, la limite α'_0 n'est jamais atteinte.

Nous avons supposé que la série diverge pour $\omega > 1$. Mais il est

clair que cette hypothèse n'a rien d'essentiel et peut être supprimée. Il suffit d'ailleurs de multiplier z par un nombre positif pour remplacer le point $\omega = 1$ par un point quelconque ω_1 sur l'axe positif.

En résumé, si la série (64) converge pour une valeur positive de ω, elle converge pour toute valeur positive de ω inférieure à un certain nombre (1) ω_1, mais diverge pour $\omega > \omega_1$. Dans l'intervalle $0 < \omega < \omega_1$, l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ est une fonction continue de ω, dont la valeur précise résulte de certaines propriétés analytiques simples de $F(z)$. Elle est, au contraire, discontinue au point ω_1, et le nombre non négatif $\lambda(\omega_1) - \lambda(\omega_1 - 0)$ peut être infiniment grand. $\lambda(\omega_1)$ n'est pas un nombre caractéristique de $F(z)$; relativement à ce nombre, nous avons dû nous borner à indiquer certaines inégalités, d'ailleurs assez resserrées, et l'on ne peut probablement pas aller plus loin.

Quand ω décroît vers zéro, $\lambda(\omega)$ tend vers α'_0, qui est un nombre caractéristique pour la fonction $F(z)$. En prenant le nombre positif ω suffisamment petit, la série converge dans tout demi-plan $\sigma > \alpha$ où la fonction est holomorphe et d'ordre fini. Donc

Pour qu'une fonction $F(z)$ *admette un développement de la forme* (64), *il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe dans un certain demi-plan* $\sigma > \alpha$, *et y satisfasse à l'inégalité*

$$|F(z)| < Ce^{k|z|}, \tag{68}$$

k étant un nombre positif.

En effet, la convergence est assurée en prenant ω tel que

$$k\omega < \log 2 \leq \psi(\rho),$$

et, réciproquement, elle entraîne l'inégalité (68) pour $k > \frac{\pi}{2\omega}$.

IX. — L'intégrale de Laplace et la série de Newton.

71. Étant donnée une série réduite

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n F(1)}{n!}(z-1)(z-2)\dots(z-n), \tag{69}$$

(1) Si $\omega_1 = \infty$, (64) converge pour toute valeur positive de ω. Pour qu'il en soit ainsi, il faut $h(\rho) \leq 0$, et il suffit que $h(\rho) < 0$.

d'abscisse de convergence λ, la fonction $F(z)$ qu'elle définit dans le demi-plan $\sigma > \lambda$ se représente par une intégrale de Laplace (¹). Considérons la fonction génératrice de la somme de cette série

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^n}, \tag{70}$$

où $F(0)$ est remplacé par une constante quelconque, si ce symbole n'a pas de sens (²). D'après l'inégalité, déduite de (51),

$$|F(n)| < 2^n n^{\lambda+\varepsilon},$$

la série qui la définit converge à l'extérieur du cercle $|t| = 2$; elle diverge, en général, à l'intérieur, mais la fonction $\varphi(t)$ est holomorphe dans une partie de ce cercle. En effet, on peut la prolonger analytiquement en appliquant la transformation d'Euler à la série (70),

$$\varphi(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\Delta} F(1)}{(t-1)^{n+1}}; \tag{71}$$

et, comme la convergence de (69) entraîne

$$\left| \overset{n}{\Delta} F(1) \right| < n^{\lambda+\varepsilon},$$

la série (71) converge à l'extérieur du cercle $|t-1| = 1$, et est d'ordre au plus égal à $\lambda + 1$ sur ce cercle.

Cela posé, remarquons qu'il résulte de (58) que

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{t^{z-1}\, dt}{(t-1)^{n+1}} = \binom{z-1}{n}, \tag{72}$$

la ligne d'intégration étant un petit cercle entourant $t = 1$, et parcouru dans le sens positif. Si $\sigma > 0$, on peut déformer ce chemin et le remplacer par une courbe L, partant de l'origine, entourant le cercle $|t-1| = 1$, et se fermant à l'origine en un point anguleux dont aucune des branches n'est tangente à ce cercle.

(¹) Cette intégrale a été envisagée par S. Pincherle [5], et F. Carlson [1].

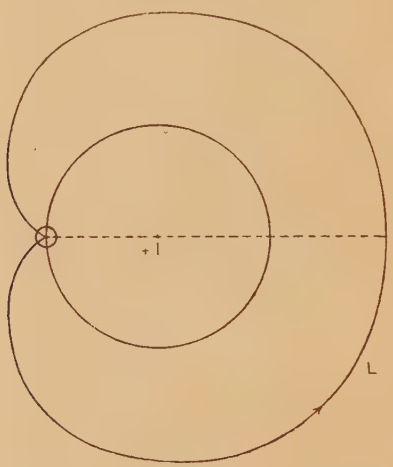
(²) Rappelons également que, si $\lambda > 1$, les valeurs $F(n)$ $(1 \leq n < \lambda)$ de la somme ne sont pas nécessairement les valeurs de la fonction en ces points, et peuvent être choisies arbitrairement sans que la série cesse d'être réduite.

Si nous supposons maintenant $\sigma > 0$, $\sigma > \lambda + 1$, nous pouvons multiplier les deux membres de (71) par t^{z-1}, et intégrer terme à terme le long de L, ce qui donne

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L t^{z-1} \varphi(t)\, dt. \tag{73}$$

Et inversement, toute intégrale de cette forme, où $\varphi(t)$ est holomorphe à l'extérieur du cercle $|t-1| = 1$, et d'ordre fini sur ce cercle, admet un développement en série de Newton.

Fig. 11.



Il existe un rapport très remarquable entre l'abscisse de convergence de (69) et l'ordre de la fonction $t^{-1}\varphi(t)$. En appliquant la transformation d'Euler à $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{t^{n+1}}$, on trouve, en effet,

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\Delta} F(0)}{(t-1)^{n+1}}, \tag{74}$$

et la formule (21) exprime que l'*ordre de la fonction* $\frac{\varphi(t)}{t}$ *sur le cercle* $|t-1| = 1$ *est toujours égal à* $\lambda + 1$. Il est souvent plus facile de déterminer l'abscisse λ à l'aide de ce théorème que par l'égalité (21) elle-même.

72. Ce résultat nous permet d'affirmer que l'intégrale (73) converge si $\sigma > \lambda$, $\sigma > -1$, mais elle peut converger dans un domaine plus étendu. En effet, sa convergence ne dépend que de l'ordre de $\frac{\varphi(t)}{t}$ au point $t = 0$, sur le cercle $|t-1| = 1$, et si cet ordre est $l_0 + 1$, la convergence a lieu pourvu que $\sigma > l_0$, $\sigma > -1$. Or, on a évidemment $l_0 \leqq \lambda$. On peut aussi s'affranchir de la condition $\sigma > -1$. En effet, si $\lambda < 0$, on a

$$F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \overset{n}{\Delta} F(1),$$

et il résulte de (71) que

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0,$$

quand t tend vers zéro le long de L. Si, en outre, $\lambda < -1$, on a

$$(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \overset{n}{\Delta} F(1),$$

et la dérivation de (71) donne

$$\lim_{t \to 0} \varphi'(t) = -F(-1),$$

t tendant toujours vers zéro le long de L. D'une manière générale, si $-p-1 \leqq \lambda < -p < 0$, on peut former la valeur de la fonction au point $z = -p$

$$F(-p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p!} \overset{n}{\Delta} F(1),$$

et, par p dérivations successives de (71), on vérifie que

$$\lim_{t \to 0} \varphi^{(p)}(t) = -p!\, F(-p),$$

t se déplaçant sur L. D'autre part, $(p+1)$ dérivations successives de (74) donnent

$$\varphi^{(p+1)}(t) = (-1)^{p+1} t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{(t-1)^{n+p+2}} \overset{n}{\Delta} F(0)$$
$$+ (-1)^p (p+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{(t-1)^{n+p+1}} \overset{n}{\Delta} F(0);$$

ces deux séries sont respectivement d'ordre $\lambda+p+2$ et $\lambda+p+1$ sur le cercle $|t-1|=1$, donc

$$\lim_{t\to 0} t^{\lambda+\varepsilon+p+1}\varphi^{(p+1)}(t)=0. \tag{75}$$

Il résulte de là que, au voisinage de $t=0$ et sur la courbe L, la fonction $\varphi(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\varphi(t)=-\sum_{n=1}^{n=p} t^n \mathrm{F}(-n)+\mathrm{O}(t^{-\lambda-\varepsilon}). \tag{76}$$

Cela posé, nous pouvons remplacer l'intégrale (73) par

$$\mathrm{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}} t^{z-1}\left[\varphi(t)+\sum_{n=1}^{n=p} t^n \mathrm{F}(-n)\right]dt; \tag{77}$$

pour $\sigma>-1$, les deux intégrales sont identiques; l'intégrale (77) représente donc bien la fonction $\mathrm{F}(z)$, mais elle converge pour $\sigma>\lambda$. Si $z\neq 0, -1, -2, \ldots, -p$, on peut intégrer $(p+1)$ fois par parties; on obtient ainsi

$$\mathrm{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{(-1)^{p+1}}{z(z+1)\ldots(z+p)}\int_{\mathrm{L}} t^{z+p}\varphi^{(p+1)}(t)\,dt, \tag{78}$$

et cette intégrale converge encore pour $\sigma>\lambda$.

Si, au contraire, λ est positif, avec $p-1<\lambda<p$, nous pouvons supposer $\mathrm{F}(0)=0$, et la série (69) choisie avec

$$\mathrm{F}(1)=\mathrm{F}(2)=\ldots=\mathrm{F}(p-1)=0.$$

On a alors

$$\varphi(t)=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(n)}{t^n}=t\sum_{n=p}^{\infty}\frac{\overset{n}{\Delta}\mathrm{F}(0)}{(t-1)^{n+1}},$$

et, en intégrant p fois, on obtient la série

$$\varphi_p(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\frac{\overset{n+p}{\Delta}\mathrm{F}(0)}{(t-1)^{n+1}},$$

avec

$$\frac{d^p\varphi_p(t)}{dt^p}=\frac{\varphi(t)}{t}.$$

Si $\sigma>\lambda$, on peut intégrer p fois par parties dans l'intégrale (73),

et il vient

$$(79)\quad F(z+p-1)=\frac{(-1)^p}{2\pi i}z(z+1)\dots(z+p-1)\int_L t^{z-1}\varphi_p(t)\,dt.$$

Suivant que λ est positif ou négatif, on peut se servir de l'expression (79) ou de (78) pour obtenir une fonction majorante relative à la fonction $F(z)$. Il suffit d'appliquer à ces deux intégrales un raisonnement semblable à celui des paragraphes 37-46, et de remplacer la ligne L par la circonférence du cercle $|t-1|=1$. En posant

$$t=1+e^{2i\theta},\qquad z=re^{iv},$$

nous savons en effet que

$$|t^z|=e^{r\lambda(\theta,v)},$$

avec, dans l'intervalle d'intégration,

$$\lambda(-v,v)=\psi(v),$$
$$\lambda(\theta,-v)<\psi(v),\qquad 0\neq v.$$

Par une analyse assez longue, on peut ainsi retrouver l'inégalité (51).

73. On peut encore déduire de l'intégrale (73) les transformations linéaires dont nous avons parlé dans les paragraphes 69, 70. Pour la transformation $(z, z+\rho)$, nous nous bornerons au cas où ρ est un entier $\pm p$, positif ou négatif. On peut en effet écrire la série (70) de la manière suivante :

$$\varphi(t)=-\sum_{n=1}^{n=p-1}F(-n)\,t^n+t^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n-p)}{t^n},$$

où les $F(-n)$ sont les valeurs de la fonction $F(z)$, ou, si ces symboles n'ont pas de sens, des constantes arbitraires. En appliquant la transformation d'Euler à la dernière série, il vient

$$\varphi(t)=-\sum_{n=1}^{n=p-1}F(-n)\,t^n+t^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n F(-p+1)}{(t-1)^{n+1}};$$

ce développement, substitué à $\varphi(t)$ dans (73), conduit, par une

intégration terme à terme, à la série

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\Delta}F(-p+1)\binom{z+p-1}{n}, \tag{80}$$

dont l'abscisse de convergence λ_p est donnée par

$$\lambda_p+p=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left|\overset{n}{\Delta}F(-p)\right|}{\log n}. \tag{81}$$

On aurait de même

$$\frac{\varphi(t)+\sum_{n=1}^{n=p}F(-n)\,t^n}{t^{p+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\Delta}F(-p)}{(t-1)^{n+1}}, \tag{82}$$

dont l'ordre sur le cercle $|t-1|=1$ est égal, d'après (81), à λ_p+p+1. L'ordre de $\frac{\varphi(t)}{t}$ sur ce cercle étant $\lambda+1$, on voit donc que

$$\lambda-p\leq\lambda_p\leq\lambda.$$

On peut aisément indiquer des conditions moyennant lesquelles on a nécessairement $\lambda_p<\lambda$. En effet, si l_0+1 et l_p+1 sont les ordres de $\frac{\varphi(t)}{t}$ et de la fonction (82) au point $t=0$, le même raisonnement donne

$$l_p\leq l_0+p.$$

On a évidemment $l_0\leq\lambda$, et, si l'on suppose en outre $l_0<\lambda-p$, il vient

$$l_p+1<\lambda+1,$$

c'est-à-dire que l'ordre de la fonction (82) au point $t=0$ est inférieur à l'ordre de $\frac{\varphi(t)}{t}$ sur le cercle $|t-1|=1$. Par conséquent, ces deux fonctions admettent le même ordre sur ce cercle, ce qui revient à dire que

$$\lambda_p=\lambda-p.$$

Si $l_0<\lambda$, notre transformation augmente donc le domaine de convergence de la série de Newton; mais si $l_0=\lambda$, elle peut l'augmenter ou non, suivant la nature du point singulier $t=0$.

La transformation inverse s'obtient en écrivant la série (70) sous la forme

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{n=p}\frac{F(n)}{t^n}+\frac{1}{t^p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n+p)}{t^n}.$$

Par la transformation d'Euler, il vient

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{n=p}\frac{F(n)}{t^n}+\frac{1}{t^p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\triangle}F(p+1)}{(t-1)^{n+1}},$$

et ce développement donne, dans (73),

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{z-p-1}{n}\triangle F(p+1), \tag{83}$$

dont l'abscisse de convergence λ_{-p} est fournie par

$$\lambda_{-p}-p=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left|\overset{n}{\triangle}F(p)\right|}{\log n}.$$

La fonction $t^{p-1}\varphi(t)$ est alors d'ordre $\lambda_{-p}-p+1$ sur le cercle $|t-1|=1$, et, par suite,

$$\lambda\leqq\lambda_{-p}\leqq\lambda+p.$$

Notre transformation diminue donc en général le domaine de convergence.

On peut encore déduire de l'intégrale (73) la transformation linéaire $\left(z,\frac{z}{\omega}\right)$. Posons, en effet,

$$t=\xi^{\frac{1}{\omega}},$$

avec $0<\omega<1$. L'image du cercle $|t-1|=1$ est, dans le plan des ξ, une courbe fermée, symétrique par rapport à l'axe réel, qu'elle coupe aux points $\xi=2^{\omega}$, $\xi=0$. En outre, elle admet à l'origine un point anguleux, d'angle $\pi\omega$, et peut être enfermée dans un secteur circulaire d'angle aussi petit et de rayon aussi voisin de 1 que l'on veut, en prenant ω suffisamment petit. $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est holomorphe à l'extérieur de cette courbe, donc *a fortiori* sur le cercle $|\xi-1|=1$, l'origine exceptée.

Avec cette nouvelle variable, l'intégrale (73) s'écrit

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \xi^{\frac{z}{\omega}-1}\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)d\xi, \tag{84}$$

le chemin d'intégration pouvant être, d'après ce qui précède, une courbe L du plan des ξ. Cette dernière intégrale est donc représentable par une série de Newton en $\frac{z}{\omega}$, c'est-à-dire de la forme

$$F(z)=\sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{(z-\omega)(z-2\omega)\dots(z-s\omega)}{s!}. \tag{85}$$

Rappelons que l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ de cette série, supposée réduite, est inférieure ou égale à λ, et même à λ_p, et cela quelque grand que soit p. L'intégrale (84) permet de le vérifier aisément pour $\lambda > 0$. En effet, dans ce cas, de ce que l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ est $\lambda+1$, résulte $\lim_{t\to 0} t^{\lambda+\varepsilon}\varphi(t)=0$ le long de L, c'est-à-dire que

$$\lim_{\xi\to 0} \xi^{\frac{\lambda+\varepsilon}{\omega}+1}\frac{\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)}{\xi}=0,$$

et, par suite, l'ordre de $\xi^{-1}\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle $|\xi-1|=1$, qui se confond d'ailleurs avec l'ordre au point $\xi=0$, est au plus égal à $\frac{\lambda}{\omega}+1$. Cet ordre étant d'autre part égal à $\frac{\lambda(\omega)}{\omega}+1$, on a bien $\lambda(\omega)\leqq\lambda$.

De même, si $\lambda_p > 0$, on a, par définition de λ_p,

$$\lim_{t\to 0} t^{\lambda_p+\varepsilon}\left[\varphi(t)-\sum_{n=1}^{p} F(-n)t^n\right]=0,$$

ce qui entraîne $\lim_{t\to 0} t^{\lambda_p+\varepsilon}\varphi(t)$, et le raisonnement précédent peut être repris pour λ_p; on vérifie donc également que $\lambda(\omega)\leqq\lambda_p$.

Remarquons encore que $\lambda(\omega)$ ne dépend que de l'ordre de

$$\xi^{-1}\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$$

au point $\xi=0$, et, comme cet ordre est non croissant lorsque ω décroît, il en est de même de $\lambda(\omega)$.

74. Lorsque $\lambda = -\infty$, la fonction $F(z)$ est entière, et (76) nous permet d'écrire

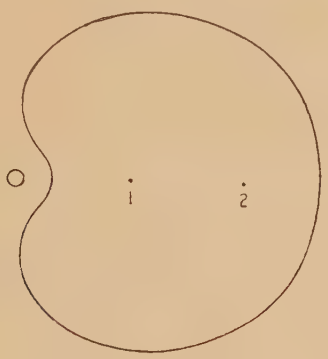
$$\varphi(t) = -\sum_{n=1}^{n=p} F(-n)\, t^n + O(t^{p+1}),$$

quelque grand que soit p. Mais cette série ne convergera pas en général, et l'on peut seulement affirmer qu'elle représente asymptotiquement $\varphi(t)$ au voisinage de l'origine et sur les courbes L, c'est-à-dire *dans un angle d'ouverture inférieure à* π. Cependant, si $\varphi(t)$ est holomorphe au point $t = 0$, la convergence a lieu, et l'on peut écrire, au voisinage de ce point,

$$\varphi(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} F(-n)\, t^n. \tag{86}$$

La seule hypothèse que $\varphi(t)$ est holomorphe à l'origine permet de déformer le chemin d'intégration L de manière à laisser ce point à gauche.

Fig. 12.



Dans l'intégrale (73), la fonction sous le signe est alors holomorphe le long de L, donc $F(z)$ est entière, et satisfait à une inégalité de la forme

$$|F(re^{iv})| < e^{Cr}, \tag{87}$$

pour toute valeur suffisamment grande de r. Cela posé, si $\lambda = -\infty$, nous savons que $\varphi(t)$ peut se représenter par la série (86); et si λ est fini, la transformation linéaire (80) donne ici $\lambda_p = \lambda - p$; par conséquent $\lambda_\infty = -\infty$, et la série (86) est encore valable.

Réciproquement, si $F(z)$ est une fonction entière qui vérifie l'inégalité (87), la série (86) converge au voisinage de $t=0$, et $\varphi(t)$ est holomorphe en ce point. En résumé, pour qu'une série de Newton représente une fonction entière $F(z)$ satisfaisant à l'inégalité (87), il faut et il suffit que la fonction génératrice $\varphi(t)$, définie par l'équation (70), soit holomorphe au voisinage de l'origine (1).

75. Si $\varphi(t)$ est holomorphe pour $\mathcal{R}(t)<\frac{1}{2}$, et d'ordre fini sur la droite $\mathcal{R}(t)=\frac{1}{2}$, on peut donner de la fonction $F(z)$ un second développement assez remarquable. En effet, le changement de t en $\frac{1}{t}$ transforme (73) en (2)

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}} t^{-z-1}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$

Mais alors, la transformation d'Euler conduit au développement

$$\varphi\left(\frac{1}{t}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(-n)}{t^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n-1}{\Delta}F(-n)}{(1-t)^n},$$

et, par hypothèse, la dernière série converge pour $|t-1|>1$, et est d'ordre fini sur le cercle $|t-1|=1$. En la substituant à $\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ dans notre intégrale, et en intégrant terme à terme, il vient donc

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\Delta}F(-n-1)\frac{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!},$$

et cette série converge dans un certain demi-plan $\mathcal{R}(z)<\lambda$.

76. En particulier, si $t=1$ est le seul point singulier de la fonction génératrice $\varphi(t)$, la série (71) converge pour toute autre valeur de t, et l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\overset{n}{\Delta}F(1)}=0. \tag{88}$$

(1) S. Pincherle [5], S. Wigert 2], F. Carlson [1].

(2) Il est clair que le chemin d'intégration L est pris ici sous la forme de la figure 12.

Le développement (69) permet alors de conclure que

$$|F(re^{i\nu})| < e^{\varepsilon r}, \tag{89}$$

pour toute valeur de r suffisamment grande, ε étant arbitrairement petit. Cette inégalité se déduit aussi de (73), car on peut remplacer le contour L par un cercle infiniment petit de centre $t = 1$. Inversement, si $F(z)$ est une fonction entière qui satisfait à la condition (89), on vérifie sans peine que (88) a lieu (1), et, par conséquent, que $\varphi(t)$ est une fonction entière de $\frac{1}{t-1}$.

En résumé, pour que la série de Newton représente une fonction entière satisfaisant à la condition (89), il faut et il suffit que la fonction génératrice n'admette pas d'autre point singulier que $t = 1$. Ce théorème a été établi par S. Wigert [1] et G. Faber [1, 2] (2). Si, en particulier, $t = 1$ est un pôle, $F(z)$ se réduit à un polynome.

77. Considérons par exemple la fonction du paragraphe 53

$$F(z) = \frac{1}{z-\alpha},$$

avec α non entier positif, négatif ou nul. La série (70) est ici

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-\alpha}\,\frac{1}{t^n},$$

et l'on en conclut aisément que la fonction $\varphi(t)$ n'admet pas d'autre point singulier que les points $t = 0$ et $t = 1$. En outre, au voisinage de l'origine, elle est de la forme

$$\varphi(t) = -\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}(-t)^{-\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\alpha+n},$$

où le dernier terme est holomorphe en ce point. L'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ au point $t = 0$ est donc égal à $\mathfrak{R}(\alpha+1)$, et l'on retrouve ainsi que la série (12) admet l'abscisse de convergence $\lambda = \mathfrak{R}(\alpha)$. En appli-

(1) E. Le Roy, *Sur les séries divergentes, et les fonctions définies par un développement de Taylor* (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 2e série, t. II, 1901, p. 348).

(2) *Voir* aussi S. Pincherle [5] et F. Carlson [1].

quant la transformation (80), on trouvera

$$\frac{1}{z-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+p-1)(z+p-2)\dots(z+p-n)}{(\alpha+p-1)(\alpha+p-2)\dots(\alpha+p-n-1)},$$

dont l'abscisse de convergence est encore $\mathcal{R}(\alpha)$, quel que soit p.

Suivant que α est entier négatif, ou non négatif, on a respectivement

$$\varphi(t)=t^{-\alpha}\log\frac{t}{t-1},$$

$$\varphi(t)=t^{-\alpha}\left[\log\frac{t}{t-1}-\sum_{n=1}^{n=\alpha}\frac{t^n}{n}\right],$$

dont l'ordre au point $t=0$ est toujours égal à $\mathcal{R}(\alpha)$.

Si $F(z)$ est une fonction rationnelle quelconque, on conclut immédiatement de ce qui précède que la fonction génératrice $\varphi(t)$ n'admet pas d'autre point singulier que $t=0$ et $t=1$, et que son ordre au point $t=0$ est la partie réelle du pôle qui a la plus grande partie réelle.

Reprenons de même la série (58), dont la fonction génératrice est

$$\varphi(t)=\frac{t}{t-a}.$$

Si $|a-1|<1$, $\frac{\varphi(t)}{t}$ est holomorphe sur le cercle $|t-1|=1$, et la série converge quel que soit z. Si $|a-1|=1$, $a\neq 0$, $\frac{\varphi(t)}{t}$ admet un pôle du premier ordre au point $t=a$, situé sur le cercle $|t-1|=1$; elle est donc d'ordre 1 en ce point, et l'on retrouve bien $\lambda=0$.

Soit encore la fonction

$$F(z)=a^z\frac{\Gamma(z+\beta)}{\Gamma(z+1)},$$

β étant un nombre quelconque, autre que $0, -1, -2, \dots$. La série (70) donne

$$\varphi(t)=\Gamma(\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!}\left(\frac{a}{t}\right)^n=\Gamma(\beta)\left(\frac{t}{t-a}\right)^{\beta},$$

et l'intégrale (73) prend la forme

$$a^z \frac{\Gamma(z+\beta)}{\Gamma(z+1)\Gamma(\beta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L t^{z+\beta-1}\frac{dt}{(t-a)^\beta}.$$

Pour $a=1$, cette intégrale se réduit à l'intégrale d'Euler de première espèce. Si $|a-1|<1$, l'ordre de $\frac{\varphi(t)}{t}$ au point $t=0$ est égal à $\mathcal{R}(1-\beta)$, et c'est son seul point singulier sur le cercle $|t-1|=1$. Donc l'abscisse de convergence de la série (69) est $-\mathcal{R}(\beta)$. Si $|a-1|=1$, $a\neq 0$, la fonction $\frac{\varphi(t)}{t}$ admet les deux points singuliers $t=0$ et $t=a$, d'ordres respectifs $\mathcal{R}(1-\beta)$, $\mathcal{R}(\beta)$, et λ est le plus grand des deux nombres $-\mathcal{R}(\beta)$, $\mathcal{R}(\beta-1)$. En particulier, si β est entier positif, $F(z)$ est une fonction entière, et $\lambda=\mathcal{R}(\beta-1)$.

Si $\beta=0$, on trouve

$$\varphi(t)=\log\frac{t}{t-a},$$

donc l'abscisse de convergence relative à la fonction

$$F(z)=\frac{a^z}{z}$$

est $\lambda=0$.

78. Une application intéressante des généralités de ce Chapitre est fournie par la fonction entière

$$F(z)=\frac{a^{z-1}}{\Gamma(z)}, \tag{90}$$

a étant un nombre positif. Tout d'abord, son expression asymptotique

$$\left|\frac{a^{z-1}}{\Gamma(re^{i\nu})}\right| = \sqrt{\frac{r}{2\pi}}\, e^{-r\log r\cos\nu + r(\cos\nu+\nu\sin\nu)+(r\cos\nu-1)\log a+\varepsilon(r)}$$

montre que la fonction $h(\nu)$ correspondante est égale à $-\infty$ à l'intérieur de l'intervalle $-\frac{\pi}{2}<\nu<\frac{\pi}{2}$. Par contre $h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, comme il résulte de la même expression où l'on suppose que $\sigma=r\cos\nu$ reste fini. La fonction (90) satisfait donc à la condition (53), avec $\alpha=0, \beta=\frac{1}{2}$, et admet un développement en série

de Newton

$$\frac{a^{z-1}}{\Gamma(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \binom{z-1}{s}. \tag{91}$$

Nous sommes ici dans le cas où $h(\nu) = \psi(\nu)$ aux extrémités de l'intervalle, et nous ne pouvons qu'appliquer le théorème général du paragraphe 66, d'après lequel $\lambda \leq 1$. Cependant la remarque finale du paragraphe 67 nous apprend que $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Pour préciser la valeur de cette abscisse, nous utiliserons la fonction génératrice, dont la formation est immédiate. La série (70), où tous les $F(n)$ sont des valeurs de la fonction, donne en effet

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{t^n} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{t} e^{\frac{a}{t}}.$$

Mais d'autre part le développement (71) donne

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\Delta} F(1)}{(t-1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{(t-1)^{n+1}},$$

donc, en posant $\frac{1}{1-t} = x$, on voit que les a_n sont les coefficients de la série de puissances

$$\frac{e^{\frac{ax}{x-1}}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{92}$$

Or cette série se rattache à une relation asymptotique due à L. Fejér (1), et dont une nouvelle démonstration a été donnée par O. Perron (2). γ étant un nombre réel, et a un nombre positif, ces auteurs démontrent en effet que les coefficients de la série de puissances

$$\frac{e^{\frac{ax}{x-1}}}{(1-x)^{\gamma}} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$$

(1) *Asymptotikus értékek meghatározásárol* (*Mathematikai és termeszettudományi értesitö*, t. XXVII, 1909, p. 1-33); *Sur une méthode de Darboux* (*Comptes rendus*, t. CXLVII, 1908, p. 1040-1042).

(2) *Ueber das infinitäre Verhalten der Koefficienten einer gewissen Potenzreihe* (*Archiv. Math. Phys.*, 3e série, t. XXII, p. 329-340).

satisfont à la relation remarquable

$$(93)\qquad \gamma_n = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{a^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}} \frac{\sin\left[2\sqrt{an} + \left(\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)\pi\right]}{n^{\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{1-\frac{\gamma}{2}}}\right).$$

En particulier, on en déduit

$$(94)\qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|\gamma_n|}{\log n} = \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{4}.$$

On a donc $a_n = \gamma_n$, si $\gamma = 1$. Mais alors, la valeur asymptotique (93), où $\gamma = 1$, montre immédiatement que l'abscisse de convergence absolue de (91) est $\mu = \frac{3}{4}$. D'autre part, en divisant les deux membres de (92) par $1 - x$, on obtient

$$\frac{e^{\frac{ax}{x-1}}}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)\, x^n,$$

et, en faisant $\gamma = 2$ dans (94), on trouve

$$\lambda = \varkappa = \frac{1}{4}.$$

La série (91) est donc simplement convergente dans la bande $\frac{1}{4} < \sigma < \frac{3}{4}$, de largeur $\frac{1}{2}$. Les a_n s'expriment d'ailleurs par les polynomes de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

On a en effet

$$a_n = (-1)^n \overset{n}{\Delta} F(1) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$a_n = L_n(a).$$

On a donc (¹)

$$(95)\qquad \frac{a^{z-1}}{\Gamma(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s L_s(a) \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{s!}.$$

(¹) Dans le mémoire *Contributions à la théorie des polynomes d'Abel-*

Cette fonction va nous permettre également d'illustrer notre étude de la transformation linéaire $(z, z+\rho)$. Considérons d'abord $\rho = p$ entier positif. La fonction $F(z-p)$ fournit la série réduite

$$\frac{a^{z-p-1}}{\Gamma(z-p)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a'_s \binom{z-1}{s}, \tag{96}$$

où $a'_0 = a'_1 = \ldots = a'_{p-1} = 0$, car $F(s) = 0$ pour $s \leq p$. La fonction génératrice est ici

$$\varphi(t) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{a^{n-p-1}}{t^n} \frac{1}{(n-p-1)!} = t^{-p-1} e^{\frac{a}{t}},$$

et l'identification avec la formule (71) donne

$$\frac{e^{\frac{ax}{x-1}}}{(x-1)^{p+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} a'_{n+p} x^n.$$

En divisant les deux membres par $x-1$, il vient

$$\frac{e^{\frac{ax}{x-1}}}{(x-1)^{p+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (a'_p + a'_{p+1} + \ldots + a'_{p+n}) x^n,$$

et la formule (94), où $\gamma = p+2$, donne

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \left| \sum_{s=p}^{n} a'_s \right|}{\log n} = \frac{p}{2} + \frac{1}{4}.$$

Donc l'abscisse de convergence de (96) est $\frac{p}{2} + \frac{1}{4}$. Enfin, en faisant $\gamma = p+1$ dans (93), on voit que son abscisse de convergence absolue est $\frac{p}{2} + \frac{3}{4}$.

Considérons de même la fonction $F(z+p)$, de développement

$$\frac{a^{z+p-1}}{\Gamma(z+p)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a''_s \binom{z-1}{s}. \tag{97}$$

Laguerre [*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* (*Stockholm*), t. XV, 1921, n° 25], S. Wigert a étudié la série (95) à un autre point de vue, en supposant z réel et >1, et en considérant a comme la variable.

Sa fonction génératrice est

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+p-1}}{t^n} \frac{1}{(n+p-1)!} = t^{p-1}\left[e^{\frac{a}{t}} - 1 - \frac{a}{t} - \ldots - \frac{\left(\frac{a}{t}\right)^{p-2}}{(p-2)!}\right],$$

et l'on a par conséquent

$$(98) \qquad -(x-1)^{p-1}\, e^{\frac{ax}{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'' x^{n+p} + Q_{p-1}(x),$$

$Q_{p-1}(x)$ étant un polynome de degré $p-1$. En divisant par $x-1$, on en déduit aisément que

$$-(x-1)^{p-2}\, e^{\frac{ax}{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1}'' + a_{n+2}'' + a_{n+3}'' + \ldots)\, x^{n+p} + Q_{p-2}(x),$$

de sorte que (94), où $\gamma = 2 - p$, donne

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left| \sum_{s=n+1}^{\infty} a_s'' \right|}{\log n} = \frac{1}{4} - \frac{p}{2};$$

c'est l'abscisse de convergence de (97), tandis que l'abscisse de convergence absolue est $\frac{3}{4} - \frac{p}{2}$, comme il résulte de (98).

En résumé, la série (91) peut se transformer en une série de la forme

$$\frac{a^{z-1}}{\Gamma(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{(z+p-1)(z+p-2)\ldots(z+p-s)}{s!},$$

p étant un entier positif ou négatif quelconque. Cette série converge pour $\sigma > \frac{1}{4} - \frac{p}{2}$, est simplement convergente dans la bande $\frac{1}{4} - \frac{p}{2} < \sigma < \frac{3}{4} - \frac{p}{2}$, et absolument convergente dans le demi-plan $\sigma > \frac{3}{4} - \frac{p}{2}$. Par la transformation $(z, z+1)$, le domaine de convergence s'accroît donc d'une bande de largeur $\frac{1}{2}$.

79. La série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma; a)$ conduit, pour $\alpha = 1 - z$, à la série de Newton

$$(99) \quad F(z) = F(1-z, \beta, \gamma; a) = \sum_{s=0}^{\infty} (-a)^s \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+s-1)} \binom{z-1}{s}.$$

Si $|a| \leq 1$, la série converge ou diverge partout. Le cas intéressant pour nous est celui où $|a| = 1$. Nous admettons en outre que ni β, ni γ, n'est entier non positif, sans quoi la série se réduirait à un nombre fini de termes ou n'aurait pas de sens.

La fonction génératrice s'exprime aussi par une série hypergéométrique. En effet, (71) s'écrit

$$\varphi(t) = F(0) + \frac{1}{t-1} F\left(1, \beta, \gamma; \frac{a}{1-t}\right),$$

et l'on voit que $\varphi(t)$ admet les seuls points singuliers $t = 1$ et $t = 1 - a$. Deux cas sont donc à distinguer suivant que $a = 1$ ou $a \neq 1$.

1° Supposons d'abord $a \neq 1$. $\varphi(t)$ est holomorphe à l'origine, et $F(z)$ est par conséquent une fonction entière de z. Des relations entre les séries hypergéométriques, on déduit aisément qu'au voisinage du point singulier $t = 1 - a$, la fonction $\varphi(t)$ est de la forme

$$(100)\quad \varphi(t) = -\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\beta)} a^{1-\gamma}(1-t)^{\beta-1}(1-a-t)^{\gamma-\beta-1} + \psi(t),$$

$\psi(t)$ étant une fonction holomorphe au point $t = 1 - a$. L'ordre de $\varphi(t)$ en ce point, sur le cercle $|t-1| = 1$, est donc $\mathcal{R}(\beta+1-\gamma)$, et, par suite, l'abscisse de convergence de (99) est (1)

$$\lambda = \mathcal{R}(\beta - \gamma).$$

Nous sommes ici d'ailleurs dans le cas du paragraphe 74, et la transformation (80) permet d'obtenir le prolongement analytique de $F(z)$ dans tout le plan.

On vérifie aisément que (99) diverge sur la droite de convergence, et converge simplement dans la bande $\lambda < \sigma \leq \lambda + 1$.

L'intégrale (73) où l'on porte l'expression (100) de $\varphi(t)$ donne

$$F(1-z, \beta, \gamma; a) = -\frac{a^{1-\gamma}}{2\pi i} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\beta)} \int_L t^{z-1}(1-a-t)^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt,$$

(1) Ce résultat s'accorde avec le théorème du paragraphe 67. La fonction $h(\varphi)$ relative à la fonction (99) admet un point de coïncidence et un seul avec $\psi(\varphi)$, et l'exposant désigné par β dans ce paragraphe est ici égal à $\mathcal{R}(\beta - \gamma)$.

où L est une courbe fermée entourant les points $t = 1$ et $t = 1 - a$, mais non $t = 0$. Si les parties réelles de β et de $\gamma - \beta$ sont positives, on peut réduire L à une droite, et l'on obtient l'intégrale eulérienne

$$(101)\quad F(1-z, \beta, \gamma; a) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-ax)^{z-1}\,dx.$$

L'expression (100) suppose $\gamma - \beta$ non entier positif. Si au contraire $\gamma - \beta = n$, elle doit être remplacée par

$$\varphi(t) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\beta)}\, a^{1-\beta-n}(1-t)^{\beta-1}(1-a-t)^{n-1}\log(1-a-t) + \psi(t),$$

mais on vérifie que l'ordre au point $t = 1 - a$ est encore égal à $\beta + 1 - \gamma = 1 - n$, et ce que nous venons de dire relativement à l'abscisse de convergence reste vrai.

2° Considérons maintenant le cas où $a = 1$. Notre série hypergéométrique devient

$$(102)\quad F(z) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta+z-1)}{\Gamma(\gamma+z-1)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+s-1)} \binom{z-1}{s}.$$

C'est une fonction méromorphe de z dont les pôles sont

$$z = \beta - \gamma + 1, \quad \beta - \gamma, \quad \beta - \gamma - 1, \quad \ldots,$$

et telle que

$$F(z) \sim C z^{-\beta}$$

pour les très grandes valeurs de z. Les deux droites de convergence coïncident donc, et passent par le pôle $\beta + 1 - \gamma$:

$$\lambda = \mu = \mathcal{R}(\beta + 1 - \gamma).$$

Nous savons qu'ici $\varphi(t)$ admet les deux seuls points singuliers $t = 0$ et $t = 1$; on peut encore le vérifier à l'aide du développement (70), car on forme facilement

$$F(n+1) = \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)\ldots(\gamma-\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

$\varphi(t)$ se représente donc par la série hypergéométrique

$$\varphi(t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma - \beta - 1} F\left(1, \gamma - \beta - 1, \gamma - 1; \frac{1}{t}\right),$$

et, au voisinage de $t = 1$, elle peut se mettre sous la forme

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} t^{\gamma-\beta-1}(t-1)^{\beta-1} + \psi(t),$$

$\psi(t)$ étant holomorphe en ce point. On peut remplacer le contour **L** par le lacet $l_{0,1}$ et l'intégrale (73) se réduit à l'intégrale eulérienne de première espèce

$$\frac{\Gamma(\gamma-\beta+z-1)}{\Gamma(\gamma+z-1)\Gamma(1-\beta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{0,1}} t^{z+\gamma-\beta-2}(t-1)^{\beta-1}\,dt.$$

Prenons en particulier $\gamma = \beta + 1$. L'équation (102) devient

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(z)}{\Gamma(z+\beta)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\beta+s}\binom{z-1}{s},$$

avec $\lambda = \mu = 0$. Si, en outre, β est un entier positif $n+1$, il vient

$$\frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+n+1}\binom{z-1}{s},$$

et, si $\beta = 1$,

$$\frac{1}{z} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1}\binom{z-1}{s}.$$

Pour $\beta = 0$, l'équation (102) se réduit à $F(z) = 1$, mais on vérifie immédiatement que

$$\lim_{r \to 0} \frac{F(z)-1}{\beta} = \Psi(\gamma) - \Psi(\gamma+z-1),$$

où

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

En formant cette même limite à l'aide de la série (102), on obtient donc

$$\Psi(\gamma+1) - \Psi(\gamma+z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+s)},$$

où $\lambda = \mu = -\mathfrak{R}(\gamma)$. En particulier, $\gamma = 0$ donne

$$\Psi(1) - \Psi(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \binom{z-1}{s}.$$

On vérifie directement cette équation en remarquant que

$$\Delta \Psi(z) = \frac{1}{z},$$

et par conséquent

$$\overset{n}{\Delta} \Psi(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

La série (71) conduit donc, pour la fonction génératrice de $\Psi(1) - \Psi(z)$, à l'expression

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{(t-1)^{n+1}} = \frac{1}{t-1} \log\left(1 - \frac{1}{t}\right),$$

et l'intégrale (73) se réduit à

$$\Psi(1) - \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,1}} t^{z-1} \frac{\log(t-1)}{t-1} \, dt.$$

CHAPITRE VI.

LA SÉRIE DE FACULTÉS.

I. — Introduction.

80. La série de facultés

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\ldots(z+s)} \tag{1}$$

présente beaucoup d'analogies avec la série de Newton, et son domaine de convergence est encore un demi-plan, comme l'a fait remarquer Jensen [1, 2]. Par contre, tandis que la convergence de la série de Newton n'est uniforme que dans un domaine à distance finie intérieur au demi-plan de convergence, la série de facultés converge uniformément dans tout demi-plan situé à l'intérieur de son domaine de convergence. On peut déduire de cette propriété des conséquences importantes qui distinguent cette série de la série de Newton. En particulier, alors que nous avons trouvé pour celle-ci des relations entre les abscisses de convergence λ, λ_ρ, $\lambda(\omega)$ et l'ordre de grandeur de la fonction, nous ne trouverons ici rien de semblable. Au contraire, on peut démontrer l'existence d'un nombre l, en général inférieur à ces trois abscisses, et tel que la fonction tende uniformément vers une limite quand z augmente indéfiniment dans le demi-plan $\sigma > l$.

La série de facultés possède également l'avantage de donner une représentation unique, et son importance provient de ce qu'elle est capable de représenter, dans un certain voisinage d'un point singulier, des classes assez étendues de fonctions. C'est ainsi que l'on peut représenter par cette série les fonctions étudiées par H. Poincaré et E. Borel, et qui donnent naissance à des séries

de puissances divergentes, qui les représentent asymptotiquement dans un certain angle et qui y sont sommables par la méthode exponentielle.

La relation étroite qu'il y a entre cette série et l'intégrale de Laplace a été remarquée pour la première fois par Schlömilch [1, 2], et étudiée tout particulièrement par S. Pincherle, à qui l'on doit, par ailleurs, plusieurs résultats importants sur notre sujet. N. Nielsen a consacré plusieurs mémoires à cette série, mais la véritable base d'une théorie a été donnée par E. Landau [1].

Signalons encore que R.-D. Carmichael [1, 2, 3, 4] a étudié une classe de séries de la forme

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s \frac{g(z+s)}{g(z)}$$

qui comprennent la série des facultés et la série de Newton. En choisissant convenablement la fonction $g(z)$, il met en évidence que ces séries plus générales possèdent plusieurs propriétés semblables à celles dont nous venons de parler.

II. — Le domaine de convergence.

81. Étant donnée une série (1), où les a_s sont indépendants de la variable z, elle n'a un sens que si z n'est pas un entier négatif ou nul, et les points $z = 0, -1, -2, \ldots$ seront toujours exclus de nos raisonnements sans qu'il soit nécessaire de mentionner chaque fois leur rôle exceptionnel. A un point $z_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, associons l'angle $\mathfrak{D}_0$ du plan des z défini par les inégalités $r \geq 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$, où l'on a posé $z = z_0 + re^{i\varphi}$, et où η est un nombre positif arbitrairement petit. Cela posé, démontrons les deux théorèmes suivants :

Théorèmes. — *Si la série* (1) *converge pour* $z = z_0$:

I [1]. *Elle converge en tout point* z *situé à droite de* $\mathfrak{R}(z) = \sigma_0$.

II [2]. *Elle converge uniformément dans l'angle* $\mathfrak{D}_0$.

---

[1] Jensen [1, 2], N. Nielsen [1, 2], Landau [1].

[2] Landau [1] démontre que la série converge uniformément dans tout domaine fini situé tout entier à l'intérieur du domaine de convergence.

Si un ou plusieurs des points $0, -1, -2, \ldots$ se trouvent dans $\mathfrak{D}_0$, nous les supposons exclus en les entourant par des cercles très petits.

Il suffit évidemment de démontrer le théorème II, et le calcul est analogue à celui fait au paragraphe 49. Soient

$$b_s = \frac{a_s\, s!}{z_0(z_0+1)\ldots(z_0+s)}, \qquad c_s = \frac{z_0(z_0+1)\ldots(z_0+s)}{z(z+1)\ldots(z+s)},$$

avec

$$c_s - c_{s+1} = c_s \frac{z - z_0}{z+s+1},$$

et appliquons la transformation d'Abel (2), (§ 49). Il nous faut démontrer que, à tout nombre ε positif, correspond un entier positif n_0 tel que, en tout point de l'angle $\mathfrak{D}_0$, on ait

$$\left| \sum_{s=n}^{s=m} b_s c_s \right| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad m \geq n \geq n_0.$$

Or, si s_0 est suffisamment grand, $s \geq s_0$ entraîne

$$|\arg(z_0+s)| < \frac{1}{2}\eta,$$

$$|z+s| > |z_0+s| + r\sin\frac{\eta}{2}, \qquad \text{(2)}$$

Since η can be taken arbitrarily small.

quel que soit z dans $\mathfrak{D}_0$. On en déduit

$$\left|\frac{z_0+s}{z+s}\right| < \frac{|z_0+s|}{|z_0+s| + r\sin\frac{\eta}{2}} < \frac{\sigma_0+s}{\sigma_0+s+\frac{1}{2}r\sin\eta},$$

$$\left|\frac{z-z_0}{z+s+1}\right| < \frac{r}{|z_0+s+1| + r\sin\frac{\eta}{2}} < \frac{r}{\sigma_0+s+1+\frac{1}{2}r\sin\eta},$$

et l'on peut écrire

$$|c_s - c_{s+1}| < \left|\frac{z_0(z_0+1)\ldots(z_0+s_0-1)}{z(z+1)\ldots(z+s_0-1)}\right| d_s \frac{r}{\sigma_0+s+1+\frac{1}{2}r\sin\eta}, \qquad \text{(3)}$$

où

$$d_s = \frac{(\sigma_0+s_0)(\sigma_0+s_0+1)\ldots(\sigma_0+s)}{\left(\sigma_0+s_0+\frac{1}{2}r\sin\eta\right)\ldots\left(\sigma_0+s+\frac{1}{2}r\sin\eta\right)}.$$

Le premier facteur du second membre de (3) reste borné dans

l'angle $\mathfrak{D}_0$, et, d'autre part,

$$\frac{d_s r}{\sigma_0 + s + 1 + \frac{1}{2} r \sin\eta} = \frac{2}{\sin\eta}(d_s - d_{s+1});$$

il vient donc

$$|c_s - c_{s+1}| < \frac{2C}{\sin\eta}(d_s - d_{s+1}), \tag{4}$$

et la démonstration se termine comme au paragraphe 49.

Posons toujours $z = \sigma + i\tau$. Il résulte du théorème I que le domaine de convergence de la série de facultés est un demi-plan limité à gauche par une certaine droite $\sigma = \lambda$, que nous appellerons encore la droite de convergence; le nombre λ s'appelle l'*abscisse de convergence*. Si $\lambda < 0$, la série présente ce fait remarquable d'admettre des points de divergence à l'intérieur de son domaine de convergence.

Le théorème II permet de conclure que la série (1) représente une fonction analytique $F(z)$, à l'intérieur du demi-plan de convergence, en exceptant, s'il y a lieu, les points $0, -1, -2, \ldots$. Si elle converge en un point z_0 de sa droite de convergence, et y admet la somme $F(z_0)$, la fonction $F(z)$ tend vers $F(z_0)$, lorsque z tend vers z_0 à l'intérieur de l'angle $\mathfrak{D}_0$.

Si les points $0, -1, -2, \ldots, -p$ sont intérieurs au domaine de convergence, ce sont en général des pôles du premier ordre pour la fonction $F(z)$. On a en effet

$$z(z+1)\ldots(z+p)\left(F(z) - \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}\right) = \sum_{s=p}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{(z+p+1)(z+p+2)\ldots(z+s)},$$

et la série au second membre est encore une série de facultés, qui admet le même demi-plan de convergence que (1), mais converge uniformément au voisinage des points $z = 0, -1, -2, \ldots, -p$. On déduit immédiatement de cette équation que le résidu A_n de la fonction $F(z)$ au point $z = -n$ est donné par la série convergente

$$A_n = (-1)^n \sum_{s=n}^{\infty} \binom{s}{n} a_s, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, p. \tag{5}$$

Si, en particulier, $A_n = 0$, $F(z)$ est holomorphe au point $z = -n$. Il peut arriver que l'abscisse de convergence λ soit égale à $-\infty$; la série (1) converge alors dans tout le plan, exception faite des points $z = 0, -1, -2, \ldots$, et elle représente une fonction méromorphe de z, admettant ces points pour pôles du premier ordre, ou pour points réguliers. Enfin, si (1) diverge quel que soit z, nous dirons que $\lambda = \infty$.

La série (1) converge uniformément dans un domaine plus étendu que ne le dit le théorème II. En modifiant légèrement la démonstration, on peut voir en effet que :

THÉORÈME II *bis*. — *Si la série* (1) *converge au point* $z = z_0$, *elle converge uniformément dans le demi-plan* $\sigma \geq \sigma_0 + \delta$, δ *étant un nombre positif arbitraire.*

Dans la démonstration nous pouvons maintenant supposer z_0 réel. Nous prendrons donc $z_0 = \sigma_0$. Soit alors s_0 un entier positif tel que $z_0 + s_0 > 0$. A l'inégalité (2), on peut substituer ici la relation

$$|z+s| \geq |z_0+s| + \delta, \tag{2'}$$

valable pour tout le demi-plan $\sigma \geq \sigma_0 + \delta$; il suffit alors de remplacer, dans les calculs précédents, $\frac{1}{2} r \sin\eta$ par δ, ce qui donne

$$|c_s - c_{s+1}| < \left| \frac{z_0(z_0+1)\ldots(z_0+s_0-1)}{z(z+1)\ldots(z+s_0-1)} (z-z_0) \right| \frac{d_s}{z_0+s+1+\delta}, \tag{3'}$$

avec

$$d_s = \frac{(z_0+s_0)(z_0+s_0+1)\ldots(z_0+s)}{(z_0+s_0+\delta)(z_0+s_0+1+\delta)\ldots(z_0+s+\delta)}.$$

Le premier facteur de (3') reste borné dans le demi-plan $\sigma \geq z_0 + \delta$, et, d'autre part, on a

$$\frac{d_s \delta}{z_0+s+1+\delta} = d_s - d_{s+1};$$

il vient donc l'inégalité, analogue à (4),

$$|c_s - c_{s+1}| < \frac{C}{\delta}(d_s - d_{s+1}),$$

et la démonstration se termine sans modification.

82. Le point à l'infini est en général un point singulier de la fonction $F(z)$. Mais il résulte du théorème II *bis* que cette fonction tend uniformément vers zéro quand z tend vers l'infini en restant dans le demi-plan $\sigma > \lambda + \delta$. La série (1) nous donne même des informations assez précises sur la valeur asymptotique de cette fonction. Mettons-la en effet sous la forme

$$F(z) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_s s!}{z(z+1)\ldots(z+s)} + \frac{\mu(z)}{z^{n+1}}. \tag{6}$$

Le théorème II *bis* nous apprend que $\mu(z)$ est holomorphe et bornée dans le demi-plan $\sigma > \lambda + \delta$, exception étant faite des points $z = -1, -2, \ldots$ qui peuvent se trouver dans ce demi-plan si $\lambda < -1$. On en déduit successivement les relations

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to\infty} z F(z) = a_0, \\ \lim\limits_{z\to\infty} (z+1)[z F(z) - a_0] = a_1 . 1!, \\ \lim\limits_{z\to\infty} (z+2)\{(z+1)[z F(z) - a_0] - a_1\} = a_2 . 2!, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{7}$$

et, d'une manière générale,

$$\lim_{z\to\infty} z^{n+1} \left(F(z) - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_s s!}{z(z+1)\ldots(z+s)} \right) = a_n n!. \tag{7'}$$

Ces égalités sont satisfaites quand z tend vers l'infini dans le demi-plan $\sigma > \lambda + \delta$, mais nous verrons plus loin qu'elles subsistent dans un domaine plus étendu.

Dans le demi-plan $\sigma > \lambda + \delta$, la fonction $F(z)$ ne prend chaque valeur qu'un nombre fini de fois. Il suffit évidemment de démontrer que les zéros d'une telle fonction sont, dans ce demi-plan, en nombre limité. Cela résulte immédiatement des relations (7); en effet, si $F(z)$ s'annulait en une infinité de points z_n, son holomorphie dans le demi-plan exigerait que le seul point limite de ces zéros fût le point à l'infini, et l'on pourrait former une suite de ces zéros tendant vers l'infini. Mais alors la première des équations (7) exprimerait que a_0 est la limite d'une suite infinie de nombres nuls, donc $a_0 = 0$. De la seconde équation, on déduirait de même $a_1 = 0$, et ainsi de suite. La série (1) aurait tous ses

coefficients nuls, et $F(z)$ s'annulerait identiquement. On en conclut, en particulier, que, contrairement à la série de Newton, la série de facultés ne peut représenter zéro sans que tous ses coefficients soient nuls, et, par suite, que le développement (1) est unique.

83. Ce que nous avons dit au paragraphe 55 relativement à la convergence absolue de la série de Newton s'applique à la série de facultés, et il suffit de rappeler les énoncés des deux théorèmes [1], dont la démonstration subsiste sans modification :

THÉORÈME III. — *Si la série* (1) *converge absolument pour* $z = z_0$, *elle converge absolument dans tout le demi-plan* $\sigma \geqq \sigma_0$.

THÉORÈME IV. — *Si la série* (1) *converge pour* $z = z_0$, *elle converge absolument pour* $\sigma > \sigma_0 + 1$.

Il va sans dire que les points $z = 0, -1, -2, \ldots$ sont toujours exceptés. Toute série de facultés possède donc deux nombres caractéristiques, l'abscisse de convergence λ, et l'abscisse de convergence absolue μ, et ces deux nombres satisfont à la double inégalité

$$\lambda \leqq \mu \leqq \lambda + 1.$$

Elle converge absolument dans le demi-plan $\sigma > \mu$, simplement dans la bande $\lambda < \sigma < \mu$, et diverge à gauche de $\sigma = \lambda$. Si $\lambda = \pm\infty$, on a également $\mu = \pm\infty$. Sur la droite de convergence absolue $\sigma = \mu$, la série converge absolument partout ou nulle part, d'après le théorème III. Cependant, si μ est un entier non positif, il peut arriver qu'elle converge absolument sur cette droite, alors qu'elle diverge au point $z = \mu$. Enfin, sur la droite $\sigma = \lambda$, la série peut converger en certains points, et diverger en d'autres.

Prenons comme exemple la série de facultés

$$(8) \qquad \frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z(z+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{z(z+1)(z+2)} + \ldots,$$

dont la somme résulte immédiatement de l'équation (12) (§ 53)

[1] On doit ces deux théorèmes à N. Nielsen [1, 2]. *Voir* aussi E. Landau [1]

par les substitutions $(z, -\alpha+1)$ et $(\alpha, -z+1)$. L'ordre de son terme général montre que son abscisse de convergence absolue est $\mu = \mathcal{R}(\alpha)$, et son terme complémentaire

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{z(z+1)\dots(z+n)}\,\frac{1}{z-\alpha}$$

donne également $\lambda = \mathcal{R}(\alpha)$. Cette série n'a donc pas de bande de convergence simple. Par contre, si nous alternons les signes des termes, la série obtenue

$$\frac{1}{z} - \frac{\alpha}{z(z+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{z(z+1)(z+2)} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots$$

a évidemment la même abscisse de convergence absolue, tandis que $\lambda = \mathcal{R}(\alpha) - 1$, et il apparaît ainsi une bande de convergence simple de largeur maximum.

III. — Comparaison avec la série de Newton associée. Théorème de Landau.

84. Nous appellerons série de facultés et série de Newton associées les deux séries

$$\text{(9)} \qquad F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)},$$

$$\text{(10)} \qquad F_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!},$$

formées avec les mêmes coefficients a_s. La comparaison de ces deux séries conduit au théorème suivant :

Théorème [1]. *Deux séries associées ont la même abscisse de convergence.*

Nous démontrerons même que pour toute valeur non entière

---

[1] E. Landau [1] démontre, en comparant chacune des séries (9) et (10) à la série de Dirichlet $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{s^z}$, que ces trois séries convergent simultanément.

de z, elles sont simultanément convergentes ou divergentes (1). Il revient au même de montrer que si (9) converge, (10) converge, et inversement. Dans les deux cas, nous utiliserons la transformation d'Abel (2), (§ 49).

1° Supposons que (9) converge. Posons

$$b_s = \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)}, \qquad c_s = (-1)^s \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-s^2)}{(s!)^2}.$$

On a

$$c_s - c_{s+1} = c_s \frac{z^2}{(s+1)^2},$$

et l'on sait que $\lim_{s\to\infty} c_s = \frac{\sin \pi z}{\pi}$, donc

$$|c_s| < C.$$

D'autre part, la convergence de (9) entraîne

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu=m} b_\nu\right| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad m \geqq n \geqq n_0; \tag{11}$$

on en déduit

$$\left|\sum_{s=n}^{s=m} b_s c_s\right| < \varepsilon C \sum_{s=n}^{s=m-1} \frac{|z^2|}{(s+1)^2} + \varepsilon C < \varepsilon C',$$

c'est-à-dire que la série (10) converge.

2° z est un nombre non entier, pour lequel la série (10) est supposée convergente. Posons ici

$$b_s = (-1)^s a_s \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!},$$

$$c_s = (-1)^s \frac{(s!)^2}{z(z^2-1^2)\dots(z^2-s^2)}.$$

Il vient

$$c_s - c_{s+1} = c_s \frac{z^2}{z^2-(s+1)^2},$$

(1) On peut aller plus loin. H. Bohr [1] démontre en effet que les deux séries associées et la série de Dirichlet $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{s^z}$ sont sommables par des moyennes arithmétiques pour les mêmes valeurs de z.

et c_s est encore borné, car $\lim_{s\to\infty} c_s = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, et z n'est pas entier. L'inégalité de même forme que (11) entraîne donc

$$\left| \sum_{s=n}^{s=m} b_s c_s \right| < \varepsilon C \sum_{s=n}^{s=m-1} \frac{|z^2|}{|z^2-(s+1)^2|} + \varepsilon C < \varepsilon C,$$

et, par conséquent, la série (9) converge avec (10) pourvu que z ne soit pas entier.

On voit même que ces deux séries convergent absolument aux mêmes points, exception faite encore des valeurs entières de z, car le rapport c_s des deux termes homologues est borné en valeur absolue.

Il résulte de ce qui précède que les abscisses de convergence λ et μ se déterminent à l'aide des coefficients de la série de facultés par les mêmes limites supérieures que dans le cas de la série de Newton (1). On a donc $\lambda = \varkappa$ si $\lambda \geq 0$, et $\lambda = k$ si $\lambda < 0$, et les expressions analogues pour μ. Ou encore : $\lambda = \varkappa$ ou k suivant que la série $\sum_{s=0}^{\infty} a_s$ diverge ou converge.

85. On peut aller encore plus loin, et démontrer avec E. Landau [1] que

Théorème (2). — *Les fonctions définies par deux séries associées admettent les mêmes points singuliers sur la droite de convergence (en exceptant toujours les valeurs entières de z).*

Il va sans dire qu'il peut n'y avoir aucun point singulier sur la droite $\sigma = \lambda$.

Ce théorème se déduit aisément du lemme suivant :

« n étant un entier positif quelconque, on peut écrire

$$(12) \qquad \frac{(n!)^2 \sin \pi z}{\pi z(1-z^2)(2^2-z^2)\dots(n^2-z^2)} = 1 - \frac{z^2}{n+1} + \frac{\varphi(z,n)}{(n+1)^2},$$

(1) *Voir* paragraphe 57.
(2) *Voir* aussi F. Nevanlinna [2].

$\varphi(z, n)$ désignant une fonction qui reste bornée en valeur absolue, quel que soit n et quel que soit z à distance finie. »

On a en effet

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right),$$

et par suite

$$\frac{(n!)^2 \sin \pi z}{\pi z (1-z^2)(2^2-z^2)\dots(n^2-z^2)} = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right).$$

Ceci posé, si z reste dans un certain domaine D à distance finie, il existe une constante C telle que

$$|z| < C;$$

en prenant $\nu > 2C$, on a donc $\left|\frac{z}{\nu}\right| < \frac{1}{2}$, et l'on peut écrire (1)

$$1 - \frac{z^2}{\nu^2} = e^{-\frac{z^2}{\nu^2} + \theta \frac{|z|^4}{\nu^4}}, \qquad |\theta| \leq 1.$$

En supposant $n > 2C$, on déduit de là

$$(13) \qquad \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right) = e^{-z^2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} + \theta C^4 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4}}, \qquad |\theta| \leq 1.$$

Mais on a

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{n+1} + \frac{\theta}{(n+1)^2}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3n^3},$$

---

(1) Si $|y| \leq \frac{1}{2}$, on a en effet

$$|\log(1-y) + y| = \left|\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\right|$$

$$< \frac{1}{2}\left(|y|^2 + |y|^3 + |y|^4 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|y|^2}{1-|y|} \leq |y|^2,$$

et par suite

$$1 - y = e^{-y + \theta |y|^2}, \qquad |\theta| \leq 1.$$

et, en portant ces expressions dans (13), il vient

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)=e^{-\frac{z^2}{n+1}+\left(\frac{\eta}{n+1}\right)^2},$$

η désignant une quantité qui reste bornée quand z reste dans D, avec $n>2C$. On en déduit immédiatement la relation (12), où $\varphi(z, n)$ reste bien inférieure à une constante qui ne dépend que du maximum de $|z|$.

Ceci démontré, on peut encore écrire cette équation comme il suit :

$$\frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}=\frac{(-1)^n\pi}{\sin\pi z}\left[\frac{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}{n!}\right.$$
$$\left.-\frac{z^2(z-1)\dots(z-n)}{(n+1)!}+\frac{\varphi(z, n)(z-1)\dots(z-n)}{(n+1)!\,(n+1)}\right],$$

d'où résulte, entre les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ définies par les séries (9) et (10), la relation

$$F(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\left[F_1(z)+z\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{n-1}\binom{z}{n}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\,\varphi(z, n)\,\frac{(z-1)\dots(z-n)}{(n+1)!\,(n+1)}\right].$$

Or si λ est l'abscisse de convergence de (9) et (10), les deux dernières séries de cette équation convergent évidemment pour $\sigma>\lambda-1$; par conséquent :

La différence

$$F(z)-F_1(z)\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{14}$$

est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma>\lambda-1$, *exception faite des valeurs entières de z qui peuvent donner lieu à des pôles.*

L'abscisse $\lambda-1$ qui intervient dans cet énoncé est aussi précise que possible et l'on peut donner aisément un exemple où la différence (14) cesse d'être holomorphe sur $\sigma=\lambda-1$. Soit

$$F_1(z)=\frac{\Gamma(z-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(z)},$$

α n'étant pas entier. En formant les différences successives de cette fonction, on obtient de suite la série de Newton correspondante

$$(15)\quad \frac{\Gamma(z-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)}{s!} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{s!}.$$

Son abscisse de convergence est $\mathcal{R}(\alpha)$, et la fonction $F_1(z)$ admet pour pôles du premier ordre les points $z=\alpha,\ \alpha-1,\ \alpha-2,\ \ldots$. La série de facultés associée est la série (8) mentionnée au paragraphe 83, et la fonction $F(z)$ est holomorphe aux points $z=\alpha-1,\ \alpha-2,\ \ldots$; cette fonction est donc régulière sur la droite $\sigma=\lambda-1$, alors que la fonction associée $F_1(z)$ y admet un pôle.

Les valeurs entières de z constituent de véritables cas d'exception. En effet, si α est un entier positif, la série (15) se réduit à un développement de zéro; elle représente donc une fonction holomorphe dans tout le plan, alors que la fonction définie par (8) admet le pôle $z=\alpha$.

Voici un autre exemple pour illustrer ce fait. Soit

$$a_s = \frac{1-2^{s+1}}{2^{s+1}}.$$

La série (9)

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1-2^{s+1}}{2^{s+1}} \frac{s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

admet l'abscisse de convergence $\lambda=1$, et il résulte de ce que nous verrons sur la représentation par l'intégrale de Laplace que

$$F(z) = -\int_0^1 t^{z-2} \frac{dt}{t+1} = \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{z+s}.$$

D'autre part, la série (10) associée s'écrit

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1-2^{s+1}}{2^{s+1}} \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{s!},$$

et par suite

$$F_1(z) = \frac{1}{2^z}.$$

C'est une fonction entière, tandis que $F(z)$ est méromorphe avec les pôles $z=1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$.

86. Comme l'a fait remarquer S. Pincherle [4], il n'y a pas, en général, de point singulier sur la droite de convergence d'une série de facultés. Nous verrons même qu'une série de facultés, convergente seulement dans un certain demi-plan, peut représenter une fonction qui soit holomorphe pour toute valeur finie de z. Il y a pourtant un cas important où la droite de convergence contient nécessairement un point singulier, comme il résulte du théorème suivant dû à E. Landau [1].

« Si les coefficients a_s d'une série de facultés sont positifs ou nuls à partir d'une certaine valeur de s, le point réel de la droite de convergence est un point singulier de la fonction représentée par la série. »

Dans la démonstration, on peut supposer $\lambda > 0$, sans quoi il suffirait de considérer, au lieu de la série (1), la série

$$z(z+1)\dots(z+p-1)\left(\mathrm{F}(z)-\sum_{s=0}^{s=p-1}\frac{a_s\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right)$$
$$=\sum_{s=p}^{\infty}\frac{a_s\,s!}{(z+p)(z+p+1)\dots(z+s)},$$

qui est une série de facultés par rapport à $z+p$, et dont l'abscisse de convergence $\lambda+p$ est positive si l'on a pris pour p un entier positif suffisamment grand. On peut également, sans diminuer la généralité, supposer tous les a_s positifs ou nuls. Cela posé, admettons que la fonction $\mathrm{F}(z)$ soit holomorphe au point $z=\lambda$ de la droite de convergence, et considérons la série de Taylor

$$\mathrm{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\lambda-1)^n}{n!}\,\mathrm{F}^{(n)}(\lambda+1).$$

Cette série converge pour $z=\lambda-\varepsilon$, si le nombre positif ε est suffisamment petit. D'autre part, la série (1) convergeant uniformément au voisinage du point $\lambda+1$, on peut en déduire les dérivées $\mathrm{F}^{(n)}(\lambda+1)$ par dérivation terme à terme, et l'on peut écrire

$$\mathrm{F}(\lambda-\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\varepsilon)^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}a_s\,s!\,(-1)^n\frac{d^n}{d\lambda^n}\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+s+1)}.$$

Tous les termes de cette série double étant positifs, on peut changer l'ordre des sommations, et l'on trouve ainsi

$$F(\lambda-\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty} a_s\, s!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-\varepsilon)^n}{n!}\,\frac{d^n}{d\lambda^n}\cdot\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+s+1)},$$

qui s'écrit encore

$$F(\lambda-\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_s\, s!}{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\varepsilon+1)\ldots(\lambda-\varepsilon+s)}.$$

Notre hypothèse conduit donc à une contradiction, puisque λ est l'abscisse de convergence.

Le théorème du paragraphe 85 permet d'étendre ce résultat à la série de Newton, à condition de supposer λ non entier positif. Dans le cas contraire, le théorème ne subsiste plus comme le montrent les développements de zéro $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$, ..., dont tous les coefficients a_s sont positifs, et qui représentent une fonction entière. On modifiera donc ainsi l'énoncé :

« Le point réel $z=\lambda$ de la droite de convergence d'une série de Newton est singulier pour la fonction représentée par la série si les coefficients a_s sont positifs ou nuls à partir d'un certain rang, et si λ n'est pas un entier positif. »

IV. — L'intégrale de Laplace et la série de facultés.

87. La convergence uniforme de la série de facultés dans un demi-plan nous permet de former directement l'intégrale de Laplace qui la représente. Soit χ un nombre positif quelconque supérieur à λ, et soit C le contour formé par un segment AB de la droite $\sigma=\chi$, et le demi-cercle droit de diamètre AB.

z étant un point quelconque situé à droite de $\sigma=\chi$, on peut prendre les affixes $\chi\pm iN$ de A et B de façon qu'il soit à l'intérieur du contour C, et l'intégrale de Cauchy donne

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi.$$

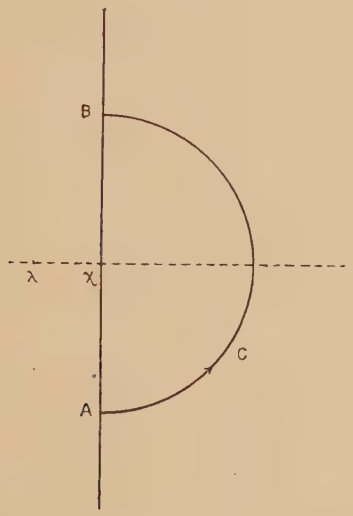
Or, d'après (7), $|zF(z)|$ reste borné dans le domaine $\sigma\geq\chi$. En faisant tendre N vers l'infini, l'intégrale relative au demi-cercle

tend donc vers zéro, et l'on a

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi, \tag{16}$$

le chemin d'intégration étant la droite $\sigma = \chi$. Mais la partie réelle

Fig. 13.



de z étant supérieure à χ, cette dernière intégrale peut s'écrire

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} F(\xi)\int_0^\infty e^{(\xi-z)x}\,dx\,d\xi, \tag{17}$$

et l'on peut renverser l'ordre des intégrations. Pour le voir, il suffit de substituer à la fonction F sous le signe son expression particulière déduite de (6)

$$F(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2}, \tag{18}$$

où $\mu(z)$ est holomorphe et bornée sur $\sigma = \chi$. L'intégrale (17) est ainsi décomposée en deux intégrales. Pour la première, il n'y a pas de difficultés. La seconde est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2}\int_0^\infty e^{(\xi-z)x}\,dx\,d\xi;$$

elle est absolument convergente, ainsi que les deux intégrales simples

$$\int_0^\infty e^{(\xi-z)x}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2}\,e^{\xi x}\,d\xi,$$

et l'on peut bien intervertir l'ordre des intégrations (¹). On obtient ainsi

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,dx, \tag{19}$$

où

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} e^{x\xi} F(\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

ou encore, en posant $e^{-x} = t$,

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt, \tag{19'}$$

où

$$\varphi(t) = f\left(\log\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} t^{-z} F(z)\,dz. \tag{20'}$$

La seule hypothèse faite sur χ étant $\chi > 0$, $\chi > \lambda$, les intégrales (20) et (20') sont indépendantes de la valeur attribuée à χ, pourvu que ces inégalités soient satisfaites. Bien plus, s'il existe un nombre positif l, inférieur à λ, tel que $F(z)$ soit holomorphe pour $\sigma \geq l$, et susceptible d'une représentation de la forme (18) où $|\mu(z)|$ est bornée supérieurement dans ce domaine, on peut substituer à χ ce nombre l, ou tout autre nombre supérieur, sans changer la valeur de ces deux intégrales. Il est d'ailleurs facile de le vérifier directement à l'aide du théorème de Cauchy sur les intégrales complexes.

Ces intégrales (20) et (20') convergent respectivement pour $0 < x < \infty$ et pour $0 < t < 1$, mais la convergence n'est pas absolue. En effet, on peut décomposer (20') en deux intégrales

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z}\frac{\mu(z)}{z^2}\,dz, \tag{21}$$

dont la seconde est seule absolument convergente. La première

(¹) Bromwich, *Theory of infinite series*, London, 1908, p. 457.

s'évalue d'ailleurs aisément à l'aide du théorème de Cauchy, qui donne, pour $l > \mathcal{R}(\alpha)$,

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}}{z-\alpha}\,dz = \begin{cases} t^{-\alpha}, & \text{si} \quad 0 < t < 1, \\ 0, & \text{si} \quad t > 1; \end{cases}$$

si $t = 1$, cette intégrale est divergente. Plus généralement, si l'on remplace, dans (21), $\frac{\mu(z)}{z^2}$ par son développement

$$(23) \qquad \frac{\mu(z)}{z^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\ldots(z+s)},$$

on est conduit à des intégrales qui ont la forme de la différence finie d'ordre s de (22), par rapport à α,

$$(24) \qquad \frac{s!}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}\,dz}{(z-\alpha)(z-\alpha+1)\ldots(z-\alpha+s)} = \begin{cases} t^{-\alpha}(1-t)^s, & \text{si} \quad 0 < t < 1, \\ 0, & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Ceci posé, si l est un nombre positif supérieur à l'abscisse de convergence absolue de la série (23), cette série est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle fini $(l - i\mathrm{N}, l + i\mathrm{N}')$. Donc la fonction $\overline{\mu}(z)$ définie par

$$\frac{\overline{\mu}(z)}{|z|^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|a_s|\, s!}{|z|\,|z+1|\ldots|z+s|}$$

est telle que $\overline{\mu}(z) < \mathrm{C}$ le long de la ligne d'intégration, et, par suite, l'intégrale

$$\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z}\,\frac{\overline{\mu}(z)}{|z|^2}\,dz$$

est absolument convergente. Mais alors on peut intégrer terme à terme (1) dans (21), et l'on trouve ainsi, pour $\varphi(t)$, le développement

$$(25) \qquad \varphi(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (1-t)^s.$$

---

(1) Bromwich, *loc. cit.*, p. 453.

En divisant les deux membres par t, on obtient encore

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \sum_{s=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_s)(1-t)^s,$$

donc $t^{-1}\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1|=1$, et d'ordre $\varkappa+1$ sur ce cercle, $\varkappa$ ayant toujours la même signification qu'au paragraphe 57.

Réciproquement, considérons une intégrale de la forme (19′) où $\varphi(t)$ est holomorphe dans le cercle $|t-1|=1$, et d'ordre fini sur ce cercle. Si $\sum_{s=0}^{\infty} a_s(1-t)^s$ est le développement de $\varphi(t)$ dans ce cercle, il résulte du lemme VII (§ 24) que la série $\sum_{s=0}^{\infty} a_s(1-t)^s t^{z-1}$ est uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ pourvu que σ soit assez grand; on peut alors effectuer l'intégration terme à terme dans (19′), et l'on obtient ainsi une série de facultés. On peut résumer ces résultats dans le

THÉORÈME (¹). — *Toute fonction analytique* $F(z)$ *représentable par une série de facultés, d'abscisse de convergence* λ, *peut s'exprimer par une intégrale de Laplace*

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt, \tag{19′}$$

$\varphi(t)$ *étant une fonction analytique définie par l'intégrale* (20′) *pour* $0 < t < 1$, *et holomorphe à l'intérieur du cercle* $|t-1|=1$. *L'ordre de* $t^{-1}\varphi(t)$ *sur ce cercle est égal à* $\lambda+1$ *si* $\lambda \geqq 0$, *et* $\geqq \lambda+1$ *si* $\lambda < 0$.

Inversement, toute intégrale de la forme (19′), *où* $\varphi(t)$ *est une fonction holomorphe dans le cercle* $|t-1|=1$, *et d'ordre fini sur ce cercle, est représentable par une série de facultés.*

88. Ce théorème ne donne une relation précise, entre l'abscisse de convergence λ de la série (1) et l'ordre h de $t^{-1}\varphi(t)$ sur le

(¹) Comparer avec les travaux cités de N. Nielsen [2], p. 239-245, et S. Pincherle [5], p. 52.

cercle $|t-1|=1$, que dans le cas où $\lambda \geqq 0$. Mais une légère modification permet de compléter ce résultat. En effet, si $\lambda < 0$, la série $\sum_{s=0}^{\infty} a_s$ converge, et sa somme est égale à la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers zéro sur le rayon $0 < t < 1$. On a donc

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \varphi(+0) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s ;$$

par conséquent,

$$(26) \qquad \frac{\varphi(t) - \varphi(+0)}{t} = -\sum_{s=0}^{\infty} (a_{s+1} + a_{s+2} + a_{s+3} + \ldots)(1-t)^s,$$

et l'ordre h' de $\frac{\varphi(t) - \varphi(+0)}{t}$ sur le cercle $|t-1|=1$ est justement

$$h' = k + 1 = \lambda + 1.$$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME. — *Si la série* $\sum_{s=0}^{\infty} a_s$ *diverge, on a* $\lambda = h - 1$; *si elle converge,* $\lambda = h' - 1$.

Ou encore : si $\lambda \geqq 0$, on a $\lambda = h - 1$, et si $\lambda < 0$, on a $\lambda = h' - 1$. En particulier, si la limite $\varphi(+0)$ existe, λ est toujours égal à $h' - 1$, car si la série $\sum_{s=0}^{\infty} a_s$ diverge, on a $h = h'$.

De même si $h \geqq 1$, on a toujours $\lambda = h - 1$. En effet, la série $\sum_{s=0}^{s=n} a_s$ ne peut converger que vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et, dans ce cas, $\varphi(+0) = 0$, et par suite $h' = h$.

89. Le domaine de convergence de l'intégrale (19′) est un demi-plan (1), à l'intérieur duquel elle représente une fonction holomorphe. Mais il ne coïncide pas nécessairement avec le demi-plan de convergence de la série (1). Nous indiquons au para-

(1) *Cf.* E. PHRAGMÉN, *Comptes rendus*, t. CXXXII, 1901, p. 1396, et S. PINCHERLE [5].

graphe 91 l'exemple d'une fonction où $\lambda = -\infty$, alors que l'intégrale converge seulement pour $\sigma > 0$, et, au paragraphe 98, l'exemple contraire d'une fonction où λ est supérieur à l'abscisse de convergence de l'intégrale (19′).

Si $\lambda \geqq 0$, il résulte du lemme VIII (§ 25) que

$$\lim_{t \to 0} t^{\lambda+\varepsilon} \varphi(t) = 0$$

le long du rayon $0 < t < 1$. Dans ce cas, l'abscisse de convergence de l'intégrale (19′) est donc au plus égale à λ. Par contre, si $\lambda < 0$, elle lui est en général supérieure, mais on peut y remédier facilement par la même méthode que pour la série de Newton. En effet, si $-p-1 \leqq \lambda < -p$, on sait que les points $z = 0, -1, -2, \ldots, -p$ sont des pôles du premier ordre pour la fonction $F(z)$, avec les résidus $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_p$, donnés par les formules (5). Or en dérivant la série (25) n fois par rapport à t, on obtient

$$\varphi^{(n)}(t) = (-1)^n \sum_{s=n}^{\infty} s(s-1)\ldots(s-n+1) a_s (1-t)^{s-n},$$

et, si $n \leqq p$, il résulte de la convergence de la série qui définit A_n que $\varphi^{(n)}(t)$ tend vers une limite lorsque t tend vers zéro, à savoir

$$\frac{\varphi^{(n)}(+0)}{n!} = A_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, p.$$

D'autre part, $p+1$ dérivations de (26) par rapport à t donnent

$$(-1)^p \varphi^{(p+1)}(t) = t \sum_{s=p+1}^{\infty} s(s-1)\ldots(s-p)(a_{s+1} + a_{s+2} + a_{s+3} + \ldots)(1-t)^{s-p-1}$$
$$-(p+1) \sum_{s=p}^{\infty} s(s-1)\ldots(s-p+1)(a_{s+1} + a_{s+2} + \ldots)(1-t)^{s-p};$$

ces deux séries sont respectivement d'ordre $\lambda + p + 2$ et $\lambda + p + 1$ sur le cercle $|t-1| = 1$, donc

$$\lim_{t \to 0} t^{\lambda+\varepsilon+p+1} \varphi^{(p+1)}(t) = 0.$$

Il résulte de là que, au voisinage de l'origine, $\varphi(t)$ est de la forme

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{n=p} A_n t^n + O(t^{-\lambda-\varepsilon}), \tag{27}$$

et, par suite, $F(z)$ peut se mettre sous la forme

$$(28)\qquad F(z)=\sum_{n=0}^{n=p}\frac{A_n}{z+n}+\int_0^1 t^{z-1}\left[\varphi(t)-\sum_{n=0}^{n=p}A_n t^n\right]dt,$$

l'abscisse de convergence de cette intégrale étant inférieure ou égale à λ.

V. — Prolongement analytique.

90. Ici encore, on peut faire appel à l'une ou l'autre des transformations linéaires $(z,\ z+\rho)$, $\left(z,\ \frac{z}{\omega}\right)$ pour réaliser le prolongement analytique de la fonction définie par la série (1). Nous commencerons par étudier la première transformation, pour laquelle on peut établir une formule analogue à celle trouvée au paragraphe 61 pour la série de Newton. Nous allons démontrer d'abord que, ρ étant un nombre quelconque à partie réelle positive (1), on a, dans le demi-plan $\sigma>0$, $\sigma>\mu$,

$$(29)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_s\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left[a_s+\binom{\rho}{1}a_{s-1}+\binom{\rho+1}{2}a_{s-2}+\dots+\binom{\rho+s-1}{s}a_0\right]s!}{(z+\rho)(z+\rho+1)\dots(s+\rho+s)}.$$

Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{z}=\int_0^1 t^{z+\rho-1}t^{-\rho}\,dt$$

valable pour $\sigma>0$. Développons $t^{-\rho}$ par la formule du binome

$$t^{-\rho}=\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\rho+s-1}{s}(1-t)^s,$$

et intégrons terme à terme; on retrouve ainsi la formule

$$(30)\qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{z+\rho}+\frac{\rho}{(z+\rho)(z+\rho+1)}+\frac{\rho(\rho+1)}{(z+\rho)(z+\rho+1)(z+\rho+2)}+\dots,$$

(1) Dans la formule analogue de la série de Newton, on a supposé ρ entier. Cette formule serait plus compliquée dans le cas contraire.

et cette série de facultés admet zéro pour abscisse de convergence absolue. De même, la différence $n^{\text{ième}}$ des deux membres de (30) conduit à une série de facultés, qui converge absolument pour $\sigma > 0$,

$$(31)\qquad \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+s-1)}{(z+\rho)(z+\rho+1)\dots(z+\rho+n+s)} \frac{(n+s)!}{s!}.$$

Cela posé, considérons la série double

$$\sum_{n,s} u_{n,s}, \qquad n, s = 0, 1, 2, \dots$$

dont le terme général est

$$u_{n,n+s} = \binom{\rho+s-1}{s} \frac{a_n (n+s)!}{(z+\rho)(z+\rho+1)\dots(z+\rho+n+s)}, \qquad s \geq 0,$$

tandis que

$$u_{n,s} = 0, \qquad s < n.$$

Elle est absolument convergente si $\sigma > \mu$, car, en posant $\rho_1 = \mathfrak{R}(\rho)$, on peut écrire

$$\left| \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+s-1)}{(z+\rho)(z+\rho+1)\dots(z+\rho+n+s)} \right| < C \frac{\rho_1(\rho_1+1)\dots(\rho_1+s-1)}{(\sigma+\rho_1)(\sigma+\rho_1+1)\dots(\sigma+\rho_1+n+s)},$$

où C ne dépend pas des entiers non négatifs n et s, et il résulte alors de (31) l'inégalité

$$\sum_{s=0}^{\infty} |u_{n,s}| < C |a_n| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho_1(\rho_1+1)\dots(\rho_1+s-1)}{(\sigma+\rho_1)(\sigma+\rho_1+1)\dots(\sigma+\rho_1+n+s)} \frac{(n+s)!}{s!} = \frac{C|a_n|\,n!}{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+n)}.$$

Mais alors on peut intervertir l'ordre des sommations, et l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} u_{n,s} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,s}$$

démontre bien la formule (29). Cette formule est encore valable dans tout le demi-plan $\sigma > 0$, $\sigma > \lambda$, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. On peut d'ailleurs le voir aisément dans le cas particulièrement intéressant où $\rho = 1$. La transformation correspondante est en effet

$$(32) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{z(z+1)\ldots(z+s)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_0+a_1+\ldots+a_s)s!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+s+1)},$$

et il résulte de la convergence uniforme que la relation subsiste partout où les deux séries convergent. Or il est évident que la série au second membre converge absolument pour $\sigma > \varkappa \geqq \lambda$, ce qui démontre notre proposition.

Cette équation (32) se déduit aussi immédiatement de la transformation d'Abel (19) (§ 57). Si $\lambda < 0$, elle ne présente plus le même intérêt car la série transformée diverge en général dans la bande $\lambda < \sigma < 0$. Mais nous pouvons recourir, comme pour la série de Newton, à l'autre forme de la transformation d'Abel (20) (§ 57). En faisant $n = 0$, elle donne ici

$$\sum_{s=0}^{s=m} \frac{a_s s!}{z(z+1)\ldots(z+s)} = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu - \sum_{s=0}^{s=m-1} \frac{s!\sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_\nu}{(z+1)(z+2)\ldots(z+s+1)} - \frac{m!\sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu}{z(z+1)\ldots(z+m)}.$$

Si $\sigma > \lambda$, le dernier terme tend vers zéro lorsque m augmente indéfiniment, et il vient

$$(33) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{z(z+1)\ldots(z+s)} = \frac{A_0}{z} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_\nu}{(z+1)(z+2)\ldots(z+s+1)},$$

où la série au second membre converge absolument pour $\sigma > \lambda$. Si $A_0 = 0$, cette équation est identique à (32); c'est donc seulement dans ce cas particulier que la série transformée (32) converge pour $\sigma > \lambda$.

D'une manière générale, si $\lambda < -p+1$, on peut appliquer la

transformation (33) p fois de suite, ce qui donne

$$(34)\quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z+1} + \dots + \frac{A_{p-1}}{z+p-1} + (-1)^p \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s! \sum_{\nu=s+p}^{\infty} \binom{\nu-s-1}{s-1} a_\nu}{(z+p)(z+p+1)\dots(z+p+s)},$$

et la série au second membre converge absolument pour $\sigma > \lambda$. Mais il peut arriver, comme nous le démontrerons au paragraphe suivant, qu'elle converge dans un domaine plus étendu.

Suivant que λ est positif ou négatif, l'une ou l'autre des transformations (32) ou (33) fournit un développement de la série (1) qui converge absolument dans le demi-plan $\sigma > \lambda$. On supprime ainsi l'inconvénient que peut présenter cette série de ne pas converger absolument dans tout son domaine de convergence. La série transformée converge même, en même temps que (1), sur la droite $\sigma = \lambda$, si $\lambda \neq 0$; cela résulte immédiatement de ce que le dernier terme de la transformation d'Abel (19) ou (20) (§ 57) est du même ordre pour la série de facultés et pour la série de Newton associée, et tend donc vers zéro sur cette droite.

Mais si $\lambda = 0$, il peut arriver que la série transformée diverge en des points de la droite $\sigma = 0$ où la série (1) converge.

91. La transformation (29) peut également se déduire de l'intégrale de Laplace. ρ étant un nombre *quelconque*, on peut écrire en effet l'équation (19′) sous la forme

$$F(z) = \int_0^1 t^{z+\rho-1} t^{-\rho} \varphi(t)\, dt,$$

et la série (25) donne le développement

$$t^{-\rho}\varphi(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[a_s + \binom{\rho}{1} a_{s-1} + \dots + \binom{\rho+s-1}{s} a_0 \right] (1-t)^s.$$

Si σ est suffisamment grand, on peut justifier aisément l'intégration terme à terme, et l'on retrouve ainsi la formule (29), où ρ est maintenant tout à fait arbitraire. Désignons toujours par h l'ordre

de $t^{-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t-1|=1$, et soit h_ρ l'ordre de $t^{-\rho-1}\varphi(t)$ sur ce cercle. Les lemmes sur l'ordre d'un produit de deux fonctions nous fournissent alors les inégalités suivantes entre h et h_ρ :

Si	$h \geqq 0$	et	$\mathcal{R}(\rho) \geqq 0$,	on a	$h_\rho \leqq h + \mathcal{R}(\rho)$,
»	$h \geqq 0$	»	$\mathcal{R}(\rho) < 0$,	»	$h_\rho \leqq h$,
»	$h < 0$	»	$\mathcal{R}(\rho) \geqq 0$,	»	$h_\rho \leqq \mathcal{R}(\rho)$,
»	$h < 0$	»	$\mathcal{R}(\rho) < 0$,	»	$h_\rho \leqq$ le plus grand des nombres h et $\mathcal{R}(\rho)$.

D'autre part, le théorème du paragraphe 87 nous apprend que l'abscisse de convergence λ_ρ de la série au second membre de (29) est telle que

$$\lambda_\rho + \mathcal{R}(\rho) \leqq h_\rho - 1.$$

Donc si $\lambda \geqq 0$, on a sûrement

$$(35) \qquad \begin{cases} \lambda_\rho \leqq \lambda & \text{pour } \mathcal{R}(\rho) \geqq 0, \\ \lambda_\rho \leqq \lambda - \mathcal{R}(\rho) & \text{» } \mathcal{R}(\rho) < 0. \end{cases}$$

Si $\lambda < 0$, avec $-p-1 \leqq \lambda < -p$, on peut reprendre le raisonnement précédent avec l'intégrale (28), et l'on obtient un développement, ayant la forme de (34),

$$(36) \qquad F(z) = \frac{A_0}{z} + \ldots + \frac{A_p}{z+p} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s s!}{(z+\rho)(z+\rho+1)\ldots(z+\rho+s)}.$$

Le rôle de $t^{-1}\varphi(t)$ est alors rempli par

$$\frac{\varphi_1(t)}{t} = \frac{\varphi(t) - \sum_{n=0}^{n=p} A_n t^n}{t}$$

dont l'ordre sur le cercle $|t-1|=1$ est le même que celui de la fonction

$$\frac{\varphi(t) - A_0}{t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(+0)}{t},$$

c'est-à-dire ce que nous avons appelé h'. Mais alors, on a entre l'ordre h'_ρ de $t^{-\rho-1}\varphi_1(t)$ et h' les mêmes inégalités que plus haut entre h_ρ et h, et maintenant $h' = \lambda + 1$. Par conséquent, l'abs-

cisse de convergence λ_ρ de (36) vérifie encore les inégalités (35). On peut donc énoncer le

THÉORÈME. — *La fonction* $F(z)$ *définie par la série* (1), *d'abscisse de convergence* λ, *admet toujours un développement de la forme* (1)

$$(36\,bis)\qquad F(z)=\frac{A_0}{z}+\ldots+\frac{A_p}{z+p}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{b_s\,s!}{(z+\rho)(z+\rho+1)\ldots(z+\rho+s)},$$

où ρ *est un nombre arbitraire, et dont l'abscisse de convergence* λ_ρ *vérifie les inégalités*

$$\lambda_\rho\leq\lambda \qquad \text{si} \qquad \mathcal{R}(\rho)\geq 0,$$
$$\lambda_\rho\leq\lambda-\mathcal{R}(\rho) \qquad \text{si} \qquad \mathcal{R}(\rho)<0.$$

Lorsque λ est négatif, les deux transformations (29) et (36) sont valables, mais, pour (29), on ne peut affirmer qu'elle converge, que dans le demi-plan $\sigma>0$. C'est ainsi que la série de facultés

$$(37)\qquad \int_0^1\frac{t^{z-1}}{1+t}\,dt=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{-s-1}\,s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

admet l'abscisse de convergence $\lambda=-\infty$, tandis que la transformation (32) donne

$$\int_0^1\frac{t^{z-1}}{1+t}\,dt=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{s!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+s+1)}\,\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}}$$

dont l'abscisse de convergence est égale à 0. Cela était d'ailleurs à prévoir car si cette abscisse avait été négative, cette dernière série aurait représenté une fonction holomorphe à l'origine.

Si $\mathcal{R}(\rho)>0$, le développement (36 *bis*) converge dans un demi-plan au moins aussi étendu que le domaine de convergence de la série (1), mais l'accroissement du domaine n'est pas arbitraire, et l'on peut lui assigner une limite supérieure. Il suffit de suivre un raisonnement analogue à celui exposé au paragraphe 73 pour la

(1) Les A_0, A_1, ..., A_p sont tous nuls si $\lambda>0$ ou si, λ étant négatif, les points $0, -1, \ldots, -p$ sont des points réguliers.

série de Newton. Supposons, pour fixer les idées, ρ réel (1) ≥ 0, et soit d'abord $\lambda > 0$. Il résulte du lemme III (§ 23) et de l'identité

$$\frac{\varphi(t)}{t} = t^{\rho}\frac{t^{-\rho}\varphi(t)}{t}$$

que l'ordre $\lambda+1$ de $\frac{\varphi(t)}{t}$ est au plus égal à h_ρ. Donc $h_\rho \geq 1$, et le théorème du paragraphe 88 nous permet d'affirmer que

$$\lambda_\rho + \rho + 1 = h_\rho,$$

c'est-à-dire que $\lambda_\rho \geq \lambda - \rho$.

Si $\lambda < 0$, il suffit de raisonner sur la formule (28) comme nous venons de faire avec $t^{-1}\varphi(t)$, et l'on peut écrire, quel que soit λ, la double inégalité

$$\lambda - \rho \leq \lambda_\rho \leq \lambda, \tag{38}$$

où λ_ρ désigne toujours l'abscisse de convergence du développement (36 *bis*).

En désignant par ε un nombre positif, on voit de même que

$$\lambda_\rho - \varepsilon \leq \lambda_{\rho+\varepsilon} \leq \lambda_\rho,$$

donc λ_ρ *est une fonction continue et non croissante de* ρ.

Il va sans dire que s'il se trouve un point singulier sur la droite de convergence de la série (1), on a $\lambda_\rho = \lambda$ quelque grand que soit ρ, un pôle simple d'affixe $0, -1, -2, \ldots$ faisant toujours exception.

Ici encore, λ_ρ peut atteindre sa limite inférieure. Il suffit pour cela que l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ à l'origine soit inférieur à son ordre sur le cercle $|t-1| = 1$. Par exemple, si l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ au point $t = 0$ est $l_0 + 1$ avec $0 < l_0 < \lambda$, on a $\lambda_\rho = \lambda - \rho$ pourvu que $0 \leq \rho \leq \lambda - l_0$, car la multiplication par $t^{-\rho}$ augmente seulement l'ordre au point $t = 0$, et non aux autres points singuliers de $\varphi(t)$.

---

(1) Cette hypothèse suffit pour réaliser le prolongement analytique, mais il peut être essentiel de considérer des valeurs complexes de ρ. C'est ainsi que, dans l'étude des solutions des équations aux différences finies, on est conduit à prendre pour ρ les racines d'une certaine équation algébrique.

92. La transformation $(z, z+p)$ est absolument équivalente à la méthode de sommation de Cesàro (par les moyennes arithmétiques), répétée p fois, et dont H. Bohr a fait un usage étendu dans l'étude de la série de Dirichlet. Il résulte en effet de cette étude que, si $\lambda_p > 0$, la série de facultés, ainsi que les séries de Newton et de Dirichlet associées, sont sommables d'ordre p dans le demi-plan $\sigma > \lambda_p$, mais non pour $\sigma < \lambda_p$. Le nombre λ_p apparaît ainsi comme l'abscisse de sommabilité d'ordre p.

Étant donnée l'analogie entre les trois séries associées, on pourrait être tenté de croire que la relation (sous forme d'inégalités) qui existe, entre l'abscisse λ_p et l'ordre de grandeur de la fonction $F(z)$, pour les séries de Newton et de Dirichlet, doit se retrouver chez la série de facultés. Il n'en est rien puisque, la série déduite de la transformation $(z, z+p)$ étant encore une série de facultés, les relations (7) subsistent à l'intérieur de tout demi-plan $\sigma \geq \lambda_p + \delta > \lambda_p$. En particulier, la fonction $F(z)$ reste bornée dans le demi-plan $\sigma \geq \lambda_\infty + \delta$, quelque petit que soit le nombre positif δ. Pourtant, il est assez curieux que l'on puisse accroître le domaine de convergence en diminuant l'ordre de grandeur de la fonction; nous démontrerons en effet dans le paragraphe 101 que l'existence du développement (1) entraîne que la fonction $\frac{F(z)}{z^p}$ admet un développement de la même forme, convergent pour $\sigma > \lambda_p \geq 0$.

93. La transformation $(z, z+\rho)$ que nous venons d'étudier ne s'applique qu'aux séries de facultés qui convergent pour des valeurs suffisamment grandes de la variable, tandis que l'autre transformation linéaire $\left(z, \frac{z}{\omega}\right)$, non seulement permet d'étendre le domaine de convergence d'une telle série, mais s'applique encore à des séries toujours divergentes. On rencontre, dans l'étude des solutions des équations aux différences finies, des séries de facultés partout divergentes, mais qui sont sommables à l'aide de cette transformation; et le calcul effectif de certains développements convergents peut s'obtenir le plus aisément par l'intermédiaire de telles séries dont on peut faire ainsi un usage légitime.

En outre, cette transformation permet de prolonger la fonc-

tion $F(z)$ plus loin que la précédente, et, ce qui est particulièrement remarquable, réalise ce prolongement analytique jusqu'à une droite $\sigma = l$ qui peut se déduire de propriétés analytiques simples de cette fonction.

Pour établir cette transformation par une première méthode, nous partirons de l'intégrale

$$\frac{1}{z} = \int_0^1 t^{z-1}\,dt,$$

convergente pour $\sigma > 0$, et de ses différences finies par rapport à z :

$$\frac{s!}{z(z+1)\dots(z+s)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^s\,dt, \qquad s = 0, 1, 2, \dots.$$

Effectuons alors le changement de variable $t = \xi^{\frac{1}{\omega}}$, ω étant un nombre plus grand que 1. Il vient

$$\frac{s!}{z(z+1)\dots(z+s)} = \frac{1}{\omega}\int_0^1 \xi^{\frac{z}{\omega}-1}\left(1-\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)^s d\xi, \tag{39}$$

et cette intégrale se développe aisément en série de facultés par rapport à la variable $\frac{z}{\omega}$. On a en effet, par la formule du binome,

$$1-\xi^{\frac{1}{\omega}} = \frac{1-\xi}{\omega} + \frac{\omega-1}{2!}\left(\frac{1-\xi}{\omega}\right)^2 + \dots + \frac{(\omega-1)(2\omega-1)\dots[(n-1)\omega-1]}{n!}\left(\frac{1-\xi}{\omega}\right)^n + \dots,$$

où le coefficient de $(1-\xi)^n$ est positif parce que $\omega > 1$. La puissance $s^{\text{ième}}$ de cette série est un développement de la forme

$$\left(1-\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)^s = \sum_{n=s}^{\infty} \psi_n^{(s)}(\omega)(1-\xi)^n, \tag{40}$$

dont les coefficients $\psi_n^{(s)}(\omega)$ sont des nombres positifs. Ces coefficients satisfont en outre, en vertu de la formule (1) du Chapitre III, à l'inégalité

$$\psi_n^{(s)}(\omega) < \frac{C}{n^{1+\frac{1}{\omega}-\varepsilon}}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

où ε est un nombre positif arbitrairement petit. En portant la série (40) dans l'équation (39), et en intégrant terme à terme, on

obtient

$$(41)\qquad \frac{s!}{z(z+1)\dots(z+s)} = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\psi_n^{(s)}(\omega)\omega^n n!}{z(z+\omega)\dots(z+n\omega)},$$

et l'inégalité relative aux $\psi_n^{(s)}(\omega)$ montre que cette série converge absolument pour $\sigma > -1$.

Cela posé, il est facile de transformer la série (1) en une autre série de facultés comportant la nouvelle variable $\frac{z}{\omega}$. Considérons en effet la série double

$$\sum_{n,s} u_{n,s}, \qquad n, s = 0, 1, 2, \dots$$

de terme général

$$u_{n,s} = \frac{a_s \psi_n^{(s)}(\omega)\omega^n n!}{z(z+\omega)\dots(z+n\omega)}.$$

Ce terme vérifie l'inégalité

$$|u_{n,s}| \leq \frac{|a_s|\psi_n^{(s)}(\omega)\omega^n n!}{|\sigma||\sigma+\omega|\dots|\sigma+n\omega|},$$

et par suite, en vertu de (41),

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,s}| \leq \frac{|a_s| s!}{|\sigma||\sigma+1|\dots|\sigma+s|}.$$

Cette série double est donc absolument convergente si $\sigma > \mu$, et la permutation de l'ordre des sommations

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,s} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} u_{n,s}$$

fournit la relation

$$(42)\qquad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s \omega^s s!}{z(z+\omega)\dots(z+s\omega)},$$

valable pour $\sigma > \mu$, $\sigma > -1$, et où l'on a posé

$$b_s = \psi_s^{(1)}(\omega)a_1 + \psi_s^{(2)}(\omega)a_2 + \dots + \psi_s^{(s)}(\omega)a_s, \qquad s > 0,$$
$$b_1 = a_1.$$

Remarquons que les coefficients b_s ne dépendent que d'un nombre fini des coefficients a_s.

Il résulte de là que toute fonction $F(z)$ représentable par une série (1) admet encore un développement de la forme (42), ω étant > 1 ; et ce développement converge absolument si $\sigma > \mu$, $\sigma > -1$. La dernière de ces conditions, introduite pour assurer la convergence de (41), est d'ailleurs indispensable, car si la série en question convergeait pour $\sigma < -1$, elle représenterait une fonction holomorphe au point $z = -1$, alors que la série (1) admet en général un pôle simple en ce point, s'il est à l'intérieur de son domaine de convergence. Quant à l'autre condition de convergence $\sigma > \mu$, nous allons voir qu'on peut la rendre moins restrictive, en établissant maintenant la transformation à l'aide de l'intégrale de Laplace. Nous verrons en même temps que la série transformée cesse généralement de converger quand ω prend des valeurs complexes, ou inférieures à 1.

94. Posons $t = \xi^{\frac{1}{\omega}}$, avec $\omega > 1$. C'est la transformation inverse de celle que nous avons utilisée au paragraphe 73 pour la série de Newton. Donc la fonction $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sera holomorphe à l'intérieur du cercle $|\xi - 1| = 1$ et sur la circonférence de ce cercle, l'origine étant exceptée. Bien plus, ceci se réalise, pourvu que ω soit suffisamment grand, si $\varphi(t)$ est seulement holomorphe à l'intérieur d'un secteur circulaire de sommet o, comprenant le segment $o \leqq t \leqq 1$, d'angle au sommet arbitraire et de rayon > 1, et telle que l'on ait uniformément à l'intérieur de ce secteur

$$\lim_{t \to 0} t^{\varkappa} \varphi(t) = 0, \tag{43}$$

$\varkappa$ étant un nombre non négatif.

Plaçons-nous dans ce cas plus général, et considérons l'intégrale

$$\int_0^1 t^{z-1} \varphi(t)\, dt, \tag{44}$$

où l'on a pris $\arg t = 0$ sur la ligne d'intégration. Elle est certainement convergente si $\sigma > \varkappa$, et définit dans ce domaine une branche d'une fonction analytique $F(z)$. Avec la nouvelle variable ξ, elle s'écrit

$$F(z) = \frac{1}{\omega} \int_0^1 \xi^{\frac{z}{\omega} - 1} \varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) d\xi. \tag{45}$$

Si ω est suffisamment grand, $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ étant holomorphe dans le cercle $|\xi - 1| = 1$, le théorème du paragraphe 87 nous apprend que l'intégrale (45) est représentable par une série de facultés, relativement à la variable $\frac{z}{\omega}$, dont l'abscisse de convergence $\frac{\lambda(\omega)}{\omega}$ est telle que $\frac{\lambda(\omega)}{\omega} + 1$ soit au plus égal à l'ordre de $\xi^{-1}\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle $|\xi - 1| = 1$. Or cet ordre se confond avec l'ordre au point $\xi = 0$, et comme (43) s'écrit encore

$$\lim_{\xi \to 0} \xi^{\frac{\varkappa}{\omega}} \varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) = 0,$$

ξ tendant vers zéro à l'intérieur du cercle $|\xi - 1| = 1$ ou même le long de ce cercle, il résulte du lemme XI (§ 25) que

$$\frac{\lambda(\omega)}{\omega} + 1 \leqq \frac{\varkappa}{\omega} + 1.$$

On obtient ainsi pour $F(z)$ un développement de la forme

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s s!}{z(z+\omega)\ldots(z+s\omega)} \tag{46}$$

d'abscisse de convergence (1) $\lambda(\omega) \leqq \varkappa$.

Si $F(z)$ est définie par une série (1) d'abscisse de convergence $\lambda > 0$, les conditions précédentes se trouvent largement réalisées, et l'on a $\varkappa = \lambda + \varepsilon$, ε étant positif et arbitrairement petit, donc $\lambda(\omega) \leqq \lambda$. D'une manière générale, le développement (46) converge si $\sigma > \lambda_p$, $\sigma > 0$, λ_p étant l'abscisse de sommabilité d'ordre p de la série (1). Cela résulte immédiatement de ce que, si λ'_p est le plus grand des deux nombres λ_p et 0, $\lambda'_p + p + 1$ est au moins égal à l'ordre de $t^{-p-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t - 1| = 1$, et par suite

$$\lim_{t \to 0} t^{\lambda'_p + \varepsilon} \varphi(t) = 0,$$

t tendant vers 0 le long d'une courbe non tangente au cercle ; nous nous retrouvons ainsi dans les circonstances initiales, avec $\varkappa = \lambda'_p + \varepsilon$, donc (46) converge pour $\sigma > \lambda'_p$, quelque grand que soit p. Lorsque

(1) C'est-à-dire que la série converge ou non suivant que $\sigma > \lambda(\omega)$ ou $\sigma < \lambda(\omega)$.

p augmente indéfiniment, la suite des nombres non croissants λ_p tend vers une limite λ_∞, et nous pouvons conclure que *la série* (46) *est convergente pour* $\sigma > \lambda_\infty$, $\sigma > 0$. La transformation $\left(z, \frac{z}{\omega}\right)$ permet donc de prolonger analytiquement la fonction définie par la série (1) au moins aussi loin que la transformation $(z, z+\rho)$, pourvu que λ_∞ ne soit pas négatif.

Remarquons encore que notre démonstration est basée sur les seuls faits que $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|\xi - 1| = 1$ et sur la circonférence de ce cercle, l'origine exceptée, avec un ordre fini positif en ce point. Donc elle peut s'appliquer, même avec certaines valeurs de ω plus petites que 1, si $\varphi(t)$ est holomorphe dans un domaine qui comprend le cercle $|t - 1| = 1$ à son intérieur, sauf peut-être $t = 0$. Et l'on peut résumer les résultats précédents dans le

THÉORÈME. — *Si* $\varphi(t)$ *est une fonction holomorphe dans un secteur circulaire de la forme susdite, assujetti à la seule condition de comprendre le segment* $0,1$, *et y satisfait à la condition* (43), *il existe un nombre* Ω *non négatif tel que l'intégrale* (44) *admette un développement en série de facultés de la forme* (46), *convergent pour* $\sigma > \varkappa$, *pourvu que l'on ait* $\omega > \Omega$, *tandis qu'un développement pareil n'existe plus pour* $\omega < \Omega$.

Ω est la borne inférieure des nombres ω tels que $\varphi(t)$ satisfasse aux conditions susdites dans l'image que donne du cercle $|\xi - 1| = 1$ la transformation $t = \xi^{\frac{1}{\omega}}$. Nous savons que si $\omega > \Omega$, $\xi = 0$ est le seul point singulier de $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$; mais pour $\omega = \Omega$, il n'en est plus ainsi en général, et le développement peut même ne pas exister; en tout cas, s'il existe, son domaine de convergence est au plus égal à celui que donne $\omega > \Omega$. D'une manière plus précise, il existe dans ce cas, sur $|\xi - 1| = 1$, un nombre fini ou infini de points singuliers; si l'un au moins de ces points est d'ordre $+\infty$, le développement n'existe plus; mais si $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\Omega}}\right)$ est encore d'ordre fini sur le cercle, cet ordre sera généralement plus élevé qu'avec $\omega > \Omega$, et l'abscisse de convergence dépend, non de l'ordre au point $\xi = 0$, mais de l'ordre total sur le cercle de convergence.

95. Du fait que les deux transformations $(z, z+\rho)$ et $\left(z, \frac{z}{\omega}\right)$, appliquées à une série (1), donnent encore des séries de facultés, le prolongement analytique qu'elles réalisent ne peut être valable que dans des demi-plans, de sorte que l'avantage qu'elles présentent au point de vue de la forme est compensé par leur impuissance à prolonger la fonction $F(z)$ définie par (1) dans tout le domaine où ce prolongement est possible. La droite limite $\sigma = l$ à laquelle on est ainsi arrêté, joue ici le rôle de la circonférence du cercle de convergence d'une série de puissances; et l'on peut se demander s'il ne correspond rien à la formule de Mittag-Leffler pour représenter une fonction définie par une série de puissances dans toute l'étoile où l'on peut en obtenir un prolongement uniforme. La réponse est affirmative. Étant donnée une fonction $F(z)$ définie par la série de facultés (1), on peut tracer à partir de chaque point singulier, et à gauche, une demi-droite parallèle à l'axe réel. Le plan ainsi découpé constitue une étoile, et la branche uniforme que l'on peut définir dans cette étoile, par prolongement analytique de la fonction $F(z)$, peut être représentée, dans toute cette étoile, par la formule suivante (1) de Mittag-Leffler [1], généralisation de l'équation (19) :

$$F(z) = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xz}}{\Gamma(1+\alpha x)} f(x)\, dx.$$

96. Nous allons appliquer les conditions précédentes à un cas particulier qu'on rencontre dans la théorie des équations linéaires aux différences finies. Soit $v(t)$ une branche d'une fonction analytique, holomorphe sur l'axe des nombres positifs entre 0 et 1, et admettant au voisinage de $t = 0$ une représentation de la forme

$$v(t) = \sum_{i=0}^{i=p} t^{\alpha_i} \{ \psi_{i,0}(t) + \psi_{i,1}(t) \log t + \ldots + \psi_{i,r_i}(t) \log^{r_i} t \},$$

les $\psi_{i,s}(t)$ étant holomorphes à l'origine, avec tous les $\psi_{i,r_i}(0) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. On suppose en outre qu'au voisinage de $t = 1$,

(1) La question du prolongement analytique, dans l'étoile principale, d'une fonction définie par une série de Dirichlet, a été résolue par M. Riesz (*Acta mathematica*, t. XXXVII, 1911, p. 253-270).

$v(t)$ est de la forme

$$v(t) = (1-t)^{\beta}\varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant holomorphe et non nulle au point $t=1$. Enfin, les α_i et β sont des nombres complexes quelconques, avec, pour fixer les idées,

$$\mathcal{R}(\alpha_1) \leqq \mathcal{R}(\alpha_2) \leqq \mathcal{R}(\alpha_3) \leqq \dots$$

Soit C le lacet composé de l'axe des nombres positifs entre o et $1-\varepsilon$, et d'un petit cercle de centre $+1$ et de rayon ε assez petit pour ne contenir aucun autre point singulier que $t=1$. Considérons l'intégrale

$$u(z) = \int_C t^{z-1} v(t)\, dt,$$

C étant parcouru dans le sens positif. Si ω est un nombre positif, la transformation $t = \xi^{\frac{1}{\omega}}$, où la détermination de ξ est réelle le long de la première partie de C, donne de C une image de même forme que l'on peut ramener à C par une déformation continue sans franchir aucun point singulier. Notre intégrale devient donc

$$u(z) = \int_C \xi^{\frac{z}{\omega}-1} v\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) d\xi. \tag{47}$$

Choisissons ω assez grand pour que $v\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ soit holomorphe dans le cercle $|\xi - 1| = 1$ et sur ce cercle, en exceptant $\xi = 0$ et $\xi = 1$. A l'intérieur du cercle, cette fonction admet un développement de la forme

$$v\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) = \omega(1-\xi)^{\beta}\varphi_1(\xi) = \omega(1-\xi)^{\beta}\{A_0 + A_1(1-\xi) + A_2(1-\xi)^2 + \dots\}, \tag{48}$$

avec, par hypothèse, $A_0 \neq 0$. Or il résulte de ce que nous avons vu au paragraphe 26 que l'ordre de $v\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ au point $\xi = 0$ est

$$h = -\mathcal{R}\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right),$$

donc il en est de même de $\varphi_1(\xi)$, et, par suite,

$$|A_n| < C n^{h+\varepsilon-1}. \tag{49}$$

On peut porter le développement (48) dans (47) et intégrer terme

à terme, car le terme général de la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} |A_s| \int_C \left| \xi^{\frac{z}{\omega}-1} (1-\xi)^{\beta+s} \right| d\xi$$

est, d'après (49), inférieur à $Cs^{h+\varepsilon-1-\frac{\sigma}{\omega}}$. On trouve ainsi

$$u(z) = (1-e^{2\pi i\beta}) \frac{\Gamma\left(\frac{z}{\omega}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{z}{\omega}+\beta+1\right)} \left\{ A_0 + A_1 \frac{(\beta+1)\omega}{z+\omega\beta+\omega} + A_2 \frac{(\beta+1)(\beta+2)\omega^2}{(z+\omega\beta+\omega)(z+\omega\beta+2\omega)} + \dots \right\},$$

où la série de facultés converge absolument si $\sigma > -\mathcal{R}(\alpha_1)$.

VI. — Problème de convergence.

97. Nous avons déterminé au paragraphe 94 des conditions suffisantes pour que l'intégrale

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t)\, dt \tag{50}$$

admette un développement de la forme

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s \omega^s s!}{z(z+\omega)\dots(z+s\omega)}. \tag{51}$$

Inversement, considérons une fonction $F(z)$ définie par un tel développement, d'abscisse de convergence λ. La série (51) étant une série de facultés relativement à $\frac{z}{\omega}$, nous savons que cette fonction est représentable par une intégrale de Laplace

$$F(z) = \frac{1}{\omega} \int_0^1 \xi^{\frac{z}{\omega}-1} \varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) d\xi,$$

$\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ désignant une fonction de ξ holomorphe à l'intérieur du cercle $|\xi - 1| = 1$, et telle que $\xi^{-1}\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ soit d'ordre $\frac{\lambda}{\omega}+1$ sur ce

cercle; et l'on a en outre

$$\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \xi^{-\frac{z}{\omega}} F(z)\,dz,$$

où $\varkappa$ est un nombre positif quelconque supérieur à λ. En revenant à la variable $t = \xi^{\frac{1}{\omega}}$, on obtient donc une intégrale de la forme (5o), où la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} t^{-z} F(z)\,dz \tag{52}$$

est holomorphe dans un secteur de sommet o, de la forme définie au paragraphe 94, et telle que, à l'intérieur de ce secteur,

$$\lim_{t\to 0} t^{\varkappa}\varphi(t) = 0. \tag{53}$$

Nous savons qu'il résulte également de (51) que

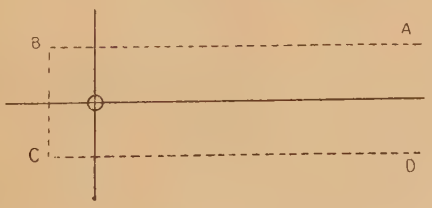
$$F(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2}, \tag{54}$$

$\mu(z)$ étant une fonction holomorphe et bornée pour $\sigma \geq \varkappa$. Si nous rappelons encore l'expression de $\varphi(t)$ à l'aide de la variable $x = \log\frac{1}{t}$,

$$\varphi(t) = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} e^{xz} F(z)\,dz, \tag{55}$$

la fonction $f(x)$ est holomorphe dans une bande ABCD de la forme ci-dessous, comprenant à son intérieur l'axe des nombres positifs (y compris $x = 0$), et d'ailleurs de largeur arbitrairement petite.

Fig. 14.



Mais en remarquant que la condition (54) suffit pour pouvoir exprimer la fonction $F(z)$ par une intégrale de la forme (5o),

convergente pour $\sigma \geqq \varkappa$, on voit que les deux conditions (53) et (54), où $\varphi(t)$ est définie par (52) ou (55), entraînent les conditions suffisantes du paragraphe 94, et l'on peut énoncer le

THÉORÈME. — *Pour qu'une fonction* $F(z)$ *puisse être représentée par une série de facultés de la forme* (51), *il faut et il suffit :*

1° *Que* $F(z)$ *admette une représentation de la forme* (54), $\mu(z)$ *étant une fonction holomorphe et bornée dans un demi-plan* $\sigma \geqq \varkappa > 0$.

2° *Que la fonction* $f(x)$ *définie pour les valeurs positives de* x *par l'équation* (55) *soit une fonction analytique de* x, *holomorphe dans une bande telle que* ABCD *et satisfaisant, uniformément dans cette bande, à la condition*

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\varkappa x} f(x) = 0. \tag{56}$$

En choisissant ω suffisamment grand, la série sera absolument convergente pour $\sigma > \varkappa$. Les deux conditions de cet énoncé ne sont d'ailleurs pas tout à fait indépendantes l'une de l'autre.

98. Pour déterminer l'abscisse de convergence de la série (51) obtenue, nous savons utiliser les coefficients de cette série, ou l'ordre de la fonction $\frac{\varphi(t)}{t}$. Mais peut-on la déduire de propriétés analytiques simples de la fonction $F(z)$ donnée? C'est en cette question importante que consiste le « problème de convergence », et nous allons voir qu'on peut y répondre, tout au moins avec une approximation que l'on peut rendre aussi grande que l'on veut en prenant ω suffisamment grand.

Supposons que nous sachions de la fonction $F(z)$ qu'elle admet :

1° Une représentation de la forme (54), $\mu(z)$ étant holomorphe et bornée dans le demi-plan $\sigma \geqq l > 0$.

2° Un développement en série de facultés (1), convergent pour $\sigma > L > l$.

La deuxième hypothèse nous apprend que la fonction génératrice $\varphi(t)$ est holomorphe dans le cercle $|t - 1| = 1$ et que l'ordre

de $t^{-1}\varphi(t)$ est au plus égal à $L+1$. On en conclut qu'on a uniformément, quel que soit ε positif,

$$\lim_{t\to 0} t^{L+\varepsilon}\varphi(t) = 0, \tag{57}$$

dans l'angle $-\frac{\pi-\eta}{2} \leqq \arg t \leqq \frac{\pi-\eta}{2}$, η étant positif et très petit. D'autre part, la première hypothèse nous permet de représenter $\varphi(t)$ par l'intégrale (52) prise le long de $\sigma = l$, ce qui donne

$$\varphi(t) = a_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z}\frac{\mu(z)}{z^2}\,dz; \tag{58}$$

$|\mu(z)|$ restant borné le long de la ligne d'intégration, cette intégrale est absolument convergente, et l'on en déduit que, le long de l'axe des nombres positifs,

$$\lim_{t\to 0} t^{l+\varepsilon}\varphi(t) = 0. \tag{59}$$

Il résulte alors des équations (57) et (59), d'après le théorème connu de Phragmén-Lindelöf que nous avons déjà utilisé à plusieurs reprises, que l'on a, uniformément dans l'angle

$$-\frac{\pi}{2}+\eta < \nu < \frac{\pi}{2}-\eta,$$

$$\lim_{r\to 0} r^{\,l+\varepsilon+\frac{L-l}{\frac{\pi}{2}-\eta}|\nu|}\varphi(re^{i\nu}) = 0,$$

ou encore, ω étant un nombre >1, que l'on a, uniformément dans l'angle $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg\xi \leqq \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\xi\to 0} \xi^{\frac{l+\varepsilon+(L-l):\omega}{\omega}}\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) = 0.$$

L'exposant de ξ étant positif, et $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ étant holomorphe sur le cercle $|\xi-1|=1$, $\xi=0$ excepté, le lemme XI (§ 25) nous apprend que l'ordre de $\xi^{-1}\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur ce cercle est au plus égal à

$$1+\frac{l+\varepsilon+(L-l):\omega}{\omega};$$

par suite, $F(z)$ admet un développement de la forme (51), conver-

gent pour $\sigma > l + \frac{L-l}{\omega}$. On peut donc représenter $F(z)$ par un développement de cette forme dans tout demi-plan

$$\sigma \geq l + \delta > l,$$

en prenant ω suffisamment grand. C'est le résultat que nous avions en vue.

On peut même démontrer quelque chose de plus : si la fonction $\mu(z)$ est encore holomorphe dans une bande $l_1 \leq \sigma \leq l$, sans y être bornée, elle ne peut y être d'ordre fini par rapport à l'ordonnée. En effet, si elle était d'ordre fini, il existerait une constante c telle que

$$\mu(\sigma \pm i\tau) = O(\tau^c), \qquad l_1 \leq \sigma \leq l,$$

et par suite, en vertu du théorème de Phragmén-Lindelöf, un nombre l_2 ($l_1 < l_2 < l$) tel qu'on ait uniformément

$$\mu(\sigma \pm i\tau) = O(\tau^\theta), \qquad l_2 \leq \sigma \leq l,$$

θ désignant un nombre compris entre o et 1. Mais alors, on ne change pas l'intégrale (58) en remplaçant l par l_2, et le même raisonnement que plus haut montre que le développement (51) converge pour $\sigma > l_2 + \varepsilon$, et par suite que $\mu(z)$ est bornée dans le domaine $\sigma > l_2 + \varepsilon$. On est ainsi conduit à une contradiction.

Nous pouvons résumer ces résultats dans le

THÉORÈME. — *Si* $F(z)$ *est une fonction analytique*

1° *holomorphe et bornée dans le demi-plan* $\sigma \geq l + \varepsilon > o$, *tandis que l'une au moins de ces conditions cesse d'être remplie dans la bande* $l - \varepsilon < \sigma < l + \varepsilon$, *quelque petit que soit* ε,

2° *développable en série de facultés de la forme* (1), *convergente pour* $\sigma > L > l$,

elle se représente par une série de facultés de la forme (51), *avec* $\omega > 1$, *dont l'abscisse de convergence* $\lambda(\omega)$ *vérifie la double inégalité*

$$l \leq \lambda(\omega) \leq l + \frac{L-l}{\omega}. \tag{60}$$

Cette abscisse de convergence tend donc vers l *quand* ω *aug-*

mente indéfiniment. En particulier les relations (7) *sont uniformément satisfaites dans le domaine* $\sigma > l + \varepsilon$.

Nous pouvons même ajouter que si $F(z)$ est holomorphe dans la bande $l_1 \leq \sigma \leq l$, elle n'est pas d'ordre fini par rapport à l'ordonnée dans cette bande.

L'inégalité (60) est d'ailleurs aussi précise que possible, car $\lambda(\omega)$ peut effectivement atteindre sa limite supérieure, comme va nous le montrer l'exemple suivant.

Considérons la fonction définie par l'intégrale de Laplace

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-l-1} e^{i\gamma \log^2 t}\, dt,$$

l et γ étant des nombres positifs. Nous avons vu au paragraphe 68 qu'elle est entière et bornée dans le demi-plan $\sigma > l + \varepsilon$; d'autre part, en posant $t = re^{i\nu}$, on a

$$\left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| = r^{-(l+1+2\nu\gamma)},$$

et $\frac{\varphi(t)}{t}$, qui est holomorphe dans le cercle $|t - 1| \leq 1$, est d'ordre $l + 1 + \pi\gamma$ sur ce cercle. En vertu du théorème du paragraphe 87, cette fonction $F(z)$ admet donc un développement de la forme (1) d'abscisse de convergence $\lambda = l + \pi\gamma$.

On voit de même que l'ordre de $t^{-p-1}\varphi(t)$ sur le cercle de convergence est $l + p + 1 + \pi\gamma$, si p est positif, donc on a ici $\lambda_p = l + \pi\gamma$, quelque grand que soit p, et l'on ne peut prolonger $F(z)$ par la transformation $(z,\ z + \rho)$ au delà de la droite $\sigma = \lambda_\infty = l + \pi\gamma$. Pourtant les relations (7) ont lieu dans tout le domaine $\sigma > l + \varepsilon$.

Si maintenant nous avons recours à la transformation $\left(z, \frac{z}{\omega}\right)$, nous avons

$$\left| t^{-1} \varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) \right| = r^{-\left(1 + \frac{l}{\omega} + \frac{2\nu\gamma}{\omega^2}\right)},$$

et nous obtenons un développement de la forme (51), d'abscisse de convergence

$$\lambda(\omega) = l + \frac{\pi\gamma}{\omega}, \qquad \omega > 0.$$

C'est la limite supérieure fixée par (60), où $L = l + \pi\gamma$. La limite

inférieure l des $\lambda(\omega)$ n'est d'ailleurs jamais atteinte ici, et la série cesse de converger pour $\sigma = l$ car $F(z)$ devient d'ordre exponentiel à gauche de cette droite.

99. Ce qui précède nous conduit à faire les remarques intéressantes suivantes. Nous avons vu que, pour une série de Newton, l'ordre de grandeur de $F(z)$ permet d'assigner des inégalités assez précises aux abscisses de convergence λ, λ_1, λ_2, ..., et que l'abscisse λ_∞ se détermine même exactement à l'aide de propriétés analytiques de cette fonction (1); par contre, pour une fonction définie par une série de facultés, rien ne distingue en apparence le demi-plan de convergence des demi-plans $\sigma > \lambda_p$, ou même du demi-plan $\sigma > \lambda_\infty$. Bien plus, alors que pour la série de Newton, la transformation $\left(z, \frac{z}{\omega}\right)$ conduit à des développements dont l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ se détermine à l'aide de propriétés analytiques simples de la fonction, ici, au contraire, la fonction se comporte de manière tout aussi régulière dans la bande $l < \sigma < \lambda_\infty$ que dans le demi-plan $\sigma > \lambda_\infty$. Il semble donc que la droite $\sigma = \lambda_\infty$ joue un rôle bien moins essentiel pour les fonctions représentées par les séries de facultés que pour celles représentées par les séries de Newton. Mais il serait intéressant d'approfondir cette question.

100. La fonction $F(z)$ définie par la série (51) est en général singulière à l'infini. Dans ce cas, son développement taylorien est divergent, mais il représente cette fonction asymptotiquement dans le domaine de convergence de la série. En effet, considérons l'expression de $F(z)$ à l'aide de $f(x)$

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\, dx, \tag{61}$$

$f(x)$ étant donnée par l'équation (55). En substituant à $F(z)$, dans cette équation, son développement limité

$$F(z) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_s \omega^s s!}{z(z+\omega)\dots(z+s\omega)} + R_n(z),$$

(1) A cet égard, H. Bohr a démontré des propriétés analogues pour la série de Dirichlet.

et en intégrant terme à terme, il vient, d'après (24),

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} a_s (1 - e^{-\omega x})^s + \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{xz} R_n(z)\, dz.$$

On en déduit l'expression des dérivées d'ordre p inférieur à n

$$f^{(p)}(x) = D_x^{(p)} \sum_{s=0}^{s=n-1} a_s (1 - e^{-\omega x})^s + \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{xz}\, z^p\, R_n(z)\, dz,$$

et l'intégrale est absolument convergente car, d'après (7), $| z^{n+1} R_n(z) |$ reste borné le long de $\sigma = \varkappa$. Or, quand x augmente indéfiniment, le premier terme du second membre tend vers zéro et le module de l'intégrale reste inférieur à $Ce^{\varkappa x}$, donc on a, pour toutes les dérivées de $f(x)$,

$$\lim_{x \to \infty} e^{-(\varkappa+\varepsilon)x} f^{(p)}(x) = 0, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{62}$$

x s'éloignant à l'infini le long de l'axe des nombres positifs.

Cela posé, l'intégrale (61), où $\sigma > \varkappa$, donne, par intégration par parties,

$$F(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{z^n} + \frac{1}{z^n} \int_0^\infty e^{-zx} f^{(n)}(x)\, dx. \tag{63}$$

$f(x)$ admettant en général des points singuliers à distance finie, cette série est généralement divergente, mais, d'après (62), on peut écrire

$$| f^{(n)}(x) | < C\, e^{(\varkappa+\varepsilon)x}$$

le long de la ligne d'intégration, et par suite

$$\left| \int_0^\infty e^{-zx} f^{(n)}(x)\, dx \right| < \frac{C}{\sigma - \varkappa - \varepsilon}.$$

Cela démontre bien que la série (63) représente $F(z)$ asymptotiquement, quand z tend vers l'infini dans le domaine $\sigma > \varkappa + \varepsilon$.

On voit donc que $F(z)$ donne naissance à une série de puissances divergente, dont on pourra faire un usage légitime en la transformant en une série de facultés. Cette transformation, très facile à effectuer, a déjà été indiquée par Stirling (1) [2]; c'est

(1) Comparez aussi Jensen [3], S. Pincherle [5], N. Nielsen [2].

là peut-être la meilleure méthode de sommation, surtout quand il s'agit d'un calcul numérique de $F(z)$ pour les très grandes valeurs de z, car la série de facultés converge alors rapidement, quand on choisit ω convenablement. Une étude approfondie de la série asymptotique (63) a été faite par G.-N. Watson [1, 2] et F. Nevanlinna [1, 2].

L'expression (63) montre encore qu'il y a une relation étroite entre la représentation d'une fonction par une série de facultés et l'importante méthode de sommation exponentielle de É. Borel. D'après la définition de É. Borel [2, 3], la série divergente

$$F(z) \sim \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z^3} + \dots$$

est absolument et uniformément sommable si la fonction associée

$$f(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!}x + \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_3}{3!}x^3 + \dots$$

est holomorphe dans un angle comprenant l'axe des nombres positifs, et si l'on a uniformément dans cet angle

$$\lim_{x \to 0} e^{-kx} f^{(p)}(x) = 0, \qquad p = 0, 1, 2, \dots. \tag{64}$$

La somme de la série est alors, par définition,

$$F(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-x} f\left(\frac{x}{z}\right) dx = \int_0^\infty e^{-xz} f(x)\, dx.$$

Si l'on change légèrement la définition de É. Borel par la substitution, à l'angle, de la bande susdite ABCD, ce qui ne présente aucun inconvénient, on voit que *les fonctions développables en série de facultés de la forme* (51) *sont les mêmes que celles qui donnent naissance à des séries de puissances de la forme* (63), *généralement divergentes, mais absolument et uniformément sommables*. Ou, plus exactement, c'est la fonction que É. Borel attribue à la série divergente comme somme, qui admet le développement en série de facultés. On connaît l'application importante que É. Borel a faite de sa méthode de sommation exponentielle à la théorie des équations différentielles algébriques. Pour les séries divergentes qui satisfont formellement à ces équations, les conditions (64) sont satisfaites dans un angle fini, de sorte que

les solutions correspondantes se représentent par des séries de facultés convergentes (¹).

VII. — Application des opérations fondamentales de l'Analyse.

101. Multiplication. — La série de facultés se prête remarquablement aux opérations fondamentales de l'Analyse, et une théorie ne saurait être complète sans une étude de ces opérations. L'addition et la soustraction ne présentent aucune difficulté. Nous commencerons donc par étudier comment se comporte la série de facultés relativement à la multiplication, et, dans ce but, nous établirons tout d'abord quelques lemmes.

Étant données une série de facultés (1), et sa transformée par $(z,\ z+\rho+1)$,

$$(65)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{S_s^{(\rho)}(a)\,s!}{(z+\rho+1)(z+\rho+2)\dots(z+\rho+s+1)},$$

nous savons que

$$(66)\qquad S_s^{(\rho)}(a)=\sum_{\nu=0}^{\nu=s}\binom{\rho+\nu}{\nu}a_{s-\nu}.$$

D'autre part, l'ensemble de ces transformations linéaires, de paramètre ρ, constitue un groupe, tel que

$$(z,\ z+\rho+\rho'+2)=(z,\ z+\rho'+1)\times(z+\rho'+1,\ z+\rho+\rho'+2),$$

et ce produit se traduit, sur les $S_s(a)$, par l'opération

$$(67)\qquad S_s^{(\rho+\rho'+1)}(a)=S_s^{(\rho)}(S^{(\rho')}(a))=\sum_{\nu=0}^{\nu=s}\binom{\rho+\nu}{\nu}S_{s-\nu}^{(\rho')}(a).$$

En identifiant les coefficients de a_0 dans les deux membres extrêmes, il vient donc (2)

$$(68)\qquad \binom{\rho+\rho'+1+s}{s}=\sum_{\nu=0}^{\nu=s}\binom{\rho+\nu}{\nu}\binom{\rho'+s-\nu}{s-\nu}.$$

(¹) Ces développements ont été étudiés dans plusieurs cas par J. Horn [1, 2, 3].

(²) Ce résultat peut s'obtenir directement par la formule d'interpolation de Newton.

On peut déduire de ces identités l'ordre de grandeur des $S_s^{(\rho)}(a)$ d'une série de facultés (1) d'abscisse de convergence λ. En effet, si λ' est le plus grand des deux nombres λ, 0, on a alors, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$|S_s^{(0)}(a)| < C s^{\lambda'+\varepsilon} < C \binom{\lambda'+\varepsilon+s}{s};$$

et en portant cette dernière limite supérieure dans (67), où $\rho' = 0$, et en tenant compte de (68), on obtient

$$(69) \quad |S_s^{(\rho+1)}(a)| < C \sum_{\nu=0}^{\nu=s} \binom{\rho+\nu}{\nu} \binom{\lambda'+\varepsilon+s-\nu}{s-\nu} = C \binom{\lambda'+\varepsilon+\rho+1+s}{s}.$$

Cela posé, considérons deux séries de la forme

$$(70) \quad F_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)},$$

$$(70') \quad F_2(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)},$$

convergentes dans le demi-plan $\sigma > \lambda$. Pour raisonner sur des séries absolument convergentes dans le demi-plan $\sigma > \lambda'$, utilisons la transformation $(z, z+1)$, ce qui donne

$$(71) \quad F_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{S_s^{(0)}(a)\, s!}{(z+1)(z+2)\dots(z+s+1)},$$

$$(71') \quad F_2(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{S_s^{(0)}(b)\, s!}{(z+1)(z+2)\dots(z+s+1)}.$$

Posons maintenant

$$u_{p,q} = \frac{S_p^{(q+1)}(a)\, S_q^{(0)}(b)\, p!\, q!}{(z+1)(z+2)\dots(z+p+q+2)}, \qquad p, q = 0, 1, 2, \dots$$

et considérons la série double

$$\sum_{p,q} u_{p,q}, \qquad p, q = 0, 1, 2, \dots.$$

L'inégalité (69) donne immédiatement, pour limite supérieure de

la valeur absolue de son terme général,

$$|u_{p,q}| < C\frac{(p+q)^{\lambda'+\varepsilon-\sigma-1}}{q+1};$$

il vient donc

$$\sum_{p=0}^{p=s} |u_{p,s-p}| < Cs^{\lambda'+\varepsilon-\sigma-1}\log(1+s), \tag{72}$$

d'où résulte la convergence absolue de cette série, dans le demi-plan $\sigma > \lambda'$. Dans ces conditions, on peut écrire la relation

$$\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{p=s} u_{p,s-p}, \tag{73}$$

dont le premier membre est justement $F_1(z)F_2(z)$, comme le montre immédiatement la première sommation

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} = \frac{S_q^{(0)}(b)\,q!}{(z+1)(z+2)\dots(z+q+1)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{S_p^{(q+1)}(a)\,p!}{(z+q+2)(z+q+3)\dots(z+p+q+2)}$$
$$= \frac{S_q^{(0)}(b)\,q!}{(z+1)(z+2)\dots(z+q+1)}F_1(z).$$

Il vient enfin

$$F_1(z)F_2(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_s\,s!}{(z+1)(z+2)\dots(z+s+1)}, \tag{74}$$

où

$$c_s = \sum_{p=0}^{p=s-1}\frac{p!\,(s-1-p)!}{s!}S_p^{(s-p)}(a)\,S_{s-p-1}^{(0)}(b).$$

Or l'ordre de grandeur de ce coefficient se déduit immédiatement de (72), car

$$|c_s| < \left|\frac{(z+1)(z+2)\dots(z+s+1)}{s!}\right|\sum_{p=0}^{s-1}|u_{p,s-1-p}| < Cs^{\lambda'+\varepsilon}\log s,$$

ou, puisque ε est arbitrairement petit,

$$|c_s| < Cs^{\lambda'+\varepsilon}.$$

Il résulte de là que la série (74) converge absolument pour $\sigma > \lambda'$. Mais elle n'est pas de la forme (1), et, pour revenir à cette forme,

il nous faut utiliser la transformation $(z, z-1)$. On trouve ainsi

$$(75)\quad F_1(z)F_2(z)=\frac{c_1 . 1!}{z(z+1)}+\frac{(c_2-c_1)2!}{z(z+1)(z+2)}+\frac{(c_3-c_2)3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\cdots,$$

et cette série converge pour $\sigma>\lambda'$, comme le montre immédiatement la valeur de la limite supérieure

$$\varkappa=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log|c_n|}{\log n}.$$

Par conséquent, le produit de deux séries de facultés convergentes pour $\sigma>\lambda'$ se représente par une série de même forme, convergente dans le même demi-plan. D'ailleurs, si la convergence des deux séries est absolue dans ce demi-plan, il en est *a fortiori* de même pour (75), puisqu'il en est ainsi pour la série majorante fournie par les valeurs absolues des coefficients a_s et b_s.

On peut encore préciser ces résultats. Remarquons en effet que le produit de deux fonctions peut être représentable par une série de facultés de la forme (1), sans que toutes les deux le soient. C'est ainsi que $CF_1(z)$ se représente, en même temps que $F_1(z)$, par une série de facultés de cette forme, bien que la constante non nulle C ne possède pas cette propriété. Plus généralement, il en est de même pour le produit

$$[F_1(z)+C]F_2(z);$$

mais, en le décomposant suivant $F_1(z)F_2(z)+CF_2(z)$, on voit que ce produit ne se représente plus par une série de la forme particulière (75), si $C\neq 0$, mais par une série de la forme générale (1), convergente encore pour $\sigma>\lambda'$. Enfin, si l'on considère un produit

$$[F_1(z)+C][F_2(z)+C'],$$

ce dernier résultat subsiste à condition de retrancher de ce produit le produit des constantes CC'.

Reprenons alors les développements (71), (71′); ils convergent absolument pour $\sigma>\lambda'$, et simplement pour $\sigma>\lambda_1'$, λ_1' étant le plus grand des deux nombres λ_1, 0. En les mettant sous la forme

$$(z+1)F_1(z)=S_0^{(0)}(a)+\frac{S_1^{(0)}(a)\,1!}{z+2}+\frac{S_2^{(0)}(a)\,2!}{(z+2)(z+3)}+\cdots,$$

$$(z+1)F_2(z)=S_0^{(0)}(b)+\frac{S_1^{(0)}(b)\,1!}{z+2}+\frac{S_2^{(0)}(b)\,2!}{(z+2)(z+3)}+\cdots,$$

il résulte des remarques précédentes que

$$(z+1)^2 F_1(z) F_2(z) - S_0^{(0)}(a) S_0^{(0)}(b)$$

est représentable par une série de la forme

$$\frac{d_2}{z+2} + \frac{d_3}{(z+2)(z+3)} + \frac{d_4}{(z+2)(z+3)(z+4)} + \dots,$$

et par suite, en désignant par d_1 le produit $S_0^{(0)}(a) S_0^{(0)}(b)$,

$$(76) \quad \frac{z+1}{z} F_1(z) F_2(z) = \frac{d_1}{z(z+1)} + \frac{d_2}{z(z+1)(z+2)} + \frac{d_3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots,$$

et cette série converge absolument pour $\sigma > \lambda'$, et simplement pour $\sigma > \lambda'_1$. Pour obtenir $F_1(z) F_2(z)$, il faut encore multiplier les deux membres de (76) par la fraction $\frac{z}{z+1}$, qui est de la forme $1 - \frac{1}{z+1}$. Cette dernière fraction $\frac{-1}{z+1}$ est seule représentable par une série de facultés, mais nous savons que cela suffit pour que le produit du second membre de (76) par $\frac{z}{z+1}$ le soit; la série de facultés que l'on obtient ne peut être que la série (75), mais nous avons ainsi démontré que cette série converge simplement pour $\sigma > \lambda'_1$ et absolument pour $\sigma > \lambda'$. Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME. — *Le produit de deux séries de facultés de la forme* (1) *d'abscisse de convergence* λ, *et sommables par la transformation* $(z, z+1)$ *dans le demi-plan* $\sigma > \lambda_1$, *se représente par une série de facultés de la même forme, convergente pour* $\sigma > \lambda_1$, $\sigma > 0$, *et absolument convergente pour* $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.

Si l'on fait la remarque évidente que la multiplication de deux séries de facultés et leur transformation par $(z, z+\rho)$ sont deux opérations permutables, on voit que l'on peut généraliser ce théorème par l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Le produit de deux séries de facultés de la forme* (1), *sommables par la transformation* $(z, z+p)$ $(p = 0, 1, 2, \dots)$ *dans le demi-plan* $\sigma > \lambda_p$, *se représente par une série de facultés de la même forme, dont la transformée par* $(z,$

$z+p$) *converge simplement pour* $\sigma > \lambda_{p+1}$, $\sigma > 0$, *et absolument pour* $\sigma > \lambda_p$, $\sigma > 0$.

En appliquant ces résultats aux produits de séries de la forme (8)

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z(z+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{z(z+1)(z+2)} + \dots,$$

que nous savons être absolument convergente pour $\sigma > \mathcal{R}(\alpha)$, nous voyons que toute fonction rationnelle qui s'annule à l'infini se représente par une série de facultés de la forme (1), absolument convergente pourvu que σ soit positif et supérieur à la partie réelle de celui des pôles dont la partie réelle est maximum.

On déduit de là un résultat déjà énoncé en partie à la fin du paragraphe 92 : *Si* $F(z)$ *est une fonction développable en série de facultés de la forme* (1), *d'abscisses de convergence* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots$, *la fonction* $z^{-p}F(z)$ *se représente par un développement de la même forme, absolument convergent pour* $\sigma > \lambda_{p-1}$, $\sigma > 0$, *et simplement convergent pour* $\sigma > \lambda_p$, $\sigma > 0$. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$\frac{F(z)}{z^p} = \frac{F(z)}{z(z+1)\dots(z+p-1)} \frac{z(z+1)\dots(z+p-1)}{z^p}.$$

Il est clair que le premier facteur du second membre se représente par une série de la forme (1), convergeant absolument pour $\sigma > \lambda_{p-1}$, et simplement pour $\sigma > \lambda_p$. Le deuxième facteur est tel que $\frac{z(z+1)\dots(z+p-1)}{z^p} - 1$ soit également représentable par une série de cette forme, pour laquelle $\mu = 0$. Le résultat énoncé est alors évident.

102. **Différentiation.** — La convergence uniforme d'une série de facultés (1) dans tout plan $\sigma > \lambda + \delta > \lambda$ permet de former la dérivée $F'(z)$ de sa somme $F(z)$ par dérivation terme à terme, et la nouvelle série obtenue

$$F'(z) = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s} \right)$$

converge dans tout le domaine de convergence uniforme. Mais ce n'est pas une série de facultés.

Cependant cette dérivée peut être représentée par une série de facultés, comme le suggère la transformation $(z,\ z+\rho)$. Cette transformation conduit en effet à l'identité

$$\frac{F(z+\rho)-F(z)}{\rho} = \frac{1}{\rho}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[a_s - S_s^{(\rho-1)}(a)\right] s!}{(z+\rho)(z+\rho+1)\ldots(z+\rho+s)}$$

$$= -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left[a_{s-1} + \frac{\rho+1}{1.2}a_{s-2} + \ldots + \frac{(\rho+1)\ldots(\rho+s-1)}{s!}a_0\right] s!}{(z+\rho)(z+\rho+1)\ldots(z+\rho+s)},$$

et, si z est un point du demi-plan $\sigma \geq \lambda$, $\sigma > 0$, cette dernière série converge, du moins si $|\rho|$ est assez petit. Si l'on fait tendre ensuite ρ vers zéro, on trouve l'expression de $F'(z)$ par une série de facultés

$$F'(z) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_{s-1}}{1} + \frac{a_{s-2}}{2} + \ldots + \frac{a_0}{s}\right) s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}. \tag{77}$$

On peut encore obtenir ce développement à l'aide de l'intégrale de Laplace. En effet, la dérivation par rapport à z de l'équation

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt \tag{78}$$

donne

$$F'(z) = \int_0^1 t^{z-1}\log t\,\varphi(t)\,dt. \tag{79}$$

En multipliant entre eux les développements de $\log t$ et de $\varphi(t)$ suivant les puissances croissantes de $1-t$, et en intégrant terme à terme, on retrouve la série (77). Mais sa représentation par l'intégrale de Laplace (79) nous fournit aisément son abscisse de convergence.

Si $\lambda \geq 0$, l'ordre de $t^{-1}\log t\varphi(t)$ est encore $\lambda+1$, et la série dérivée a même abscisse de convergence que la série donnée.

Si $\lambda < 0$, avec $-p-1 \leq \lambda < -p$, il suffit de déduire (77) de l'équation (28)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{p} \frac{A_n}{z+n} + \int_0^1 t^{z-1}\varphi_1(t)\,dt.$$

Nous savons que l'ordre de $t^{-1}\varphi_1(t)$ est encore $\lambda+1$, et qu'il

n'est pas modifié par multiplication par $\log t$; l'abscisse de convergence ne pourra donc être changée par la dérivation que par suite de la présence des pôles. Or la dérivée $\frac{-A_n}{(z+n)^2}$ donne une série de facultés d'abscisse de convergence égale à $-n$, de sorte que nous pouvons énoncer le

THÉORÈME. — *Si une fonction* $F(z)$ *est représentable par une série de facultés de la forme* (1), *d'abscisse de convergence* λ, *sa dérivée* $F'(z)$ *est représentable par une série de même forme, dont l'abscisse de convergence est également* λ, *si* $\lambda > 0$. *Si* $\lambda < 0$, *cette abscisse est en général zéro par suite de l'existence du pôle double à l'origine.*

Pourtant il résulte de la démonstration que, si $F(z)$ est régulière aux points $z = 0, -1, \ldots$, et si $-n (n \leq p)$ est le premier de ses pôles, l'abscisse de convergence de la série dérivée est l'abscisse de ce pôle. En particulier, si $F(z)$ est régulière pour $\sigma > \lambda$, la série dérivée converge pour $\sigma > \lambda$.

Pour illustrer ces diverses circonstances, il suffit de reprendre les deux exemples suivants. La série

$$\frac{1}{z-\alpha} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

admet l'abscisse de convergence $\lambda = \mathcal{R}(\alpha)$, et, en dérivant, on obtient

$$\frac{1}{(z-\alpha)^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)}{z(z+1)\ldots(z+s)} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+s-1} \right),$$

qui a la même abscisse de convergence, et cela quel que soit α.

Par contre, la série

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{-s-1}\, s!}{z(z+1)\ldots(z+s)},$$

qui converge dans tout le plan, admet la série dérivée

$$F'(z) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2^{-s}}{1} + \frac{2^{-s+1}}{2} + \ldots + \frac{2^{-1}}{s} \right) s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

dont l'abscisse de convergence est nulle.

103. Intégration. — Pour étudier le développement de l'intégrale de $F(z)$, reprenons la représentation de cette fonction par l'intégrale de Laplace (78). Soit α un point intérieur au demi-plan $\sigma > \lambda$. En intégrant de α jusqu'à z, on trouve

$$\int_\alpha^z F(z)\,dz = \int_0^1 (t^{z-1} - t^{\alpha-1})\,\frac{\varphi(t)}{\log t}\,dt;$$

et, en tenant compte de

$$\log z = \int_0^1 \frac{t^{z-1}-1}{\log t}\,dt, \qquad \sigma > 0,$$

cette équation peut encore s'écrire

$$\int_\alpha^z F(z)\,dz = C + \varphi(1)\log z + \int_0^1 t^{z-1}\,\frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{\log t}\,dt. \tag{80}$$

Cette dernière intégrale se développe en série de facultés, dont l'abscisse de convergence est le plus grand des deux nombres λ et 0. Pourtant, si $a_0 = 0$, et si $F(z)$ est régulière pour $\sigma > \lambda$, l'abscisse de convergence de cette série est λ, même si $\lambda < 0$. On aura donc

$$\int_\alpha^z F(z)\,dz = C + a_0 \log z + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}. \tag{81}$$

Pour déterminer les coefficients b_s, il suffit de dériver les deux membres par rapport à z, et d'identifier. Il vient ainsi, d'après (77),

$$F(z) = \frac{a_0}{z} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{b_{s-1}}{1} + \frac{b_{s-2}}{2} + \dots + \frac{b_0}{s}\right) s!}{z(z+1)\dots(z+s)},$$

et, par suite,

$$\frac{b_{s-1}}{1} + \frac{b_{s-2}}{2} + \dots + \frac{b_0}{s} = -a_s, \qquad s = 1, 2, 3, \dots.$$

Ces équations déterminent les coefficients b_s d'une manière unique, et leur résolution donne

$$b_s = -a_{s+1} + \frac{1}{2}a_s + \sum_{\nu=2}^{\nu=s} (-1)^\nu \frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu!}\,a_{s-\nu+1}, \tag{82}$$

où les $B_\nu^{(\mu)}$ sont les nombres de Bernoulli. Ces expressions des b_s peuvent encore se former directement à partir de l'équation (80). Nous savons en effet que les b_s sont les coefficients du développement de $\frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{\log t}$ suivant les puissances croissantes de $1-t$. Or on connaît le développement de $\frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{1-t}$, qui est

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{1-t} = a_1 + a_2(1-t) + a_3(1-t)^2 + \dots. \tag{83}$$

Il reste donc à déterminer celui de $\frac{1-t}{\log t}$; en posant $t-1=u$, il vient

$$\frac{1-t}{\log t} = -\frac{u}{\log(1+u)} = -\int_0^1 (1+u)^x\, dx,$$

et l'on a $|u|<1$ le long du segment $0<t<1$. On peut donc substituer à $(1+u)^x$, dans cette intégrale, son développement de Newton

$$(1+u)^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} u^\nu \frac{x(x-1)\dots(x-\nu+1)}{\nu!},$$

qui est absolument convergent puisque $|u|<1$, et intégrer terme à terme. On obtient ainsi

$$\frac{u}{\log(1+u)} = 1 + \frac{1}{2}u - \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu-1}\frac{u^\nu}{\nu!},$$

où

$$-\frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu-1} = \int_0^1 x(x-1)\dots(x-\nu+1)\, dx$$

est une expression connue des nombres de Bernoulli. En revenant à la variable t, il vient donc

$$\frac{1-t}{\log t} = -1 + \frac{1}{2}(1-t) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu-1} B_\nu^{(\nu-1)} \frac{(1-t)^\nu}{\nu!}, \tag{84}$$

et, en effectuant le produit de (83) et (84), on a enfin

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{\log t} = -a_1 + \left(-a_2 + \frac{1}{2}a_1\right)(1-t) + \left(-a_3 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{B_2^{(1)}}{2!}a_1\right)(1-t)^2 + \dots$$

dont les coefficients sont bien les expressions (82) des b_s.

Proposons-nous, par exemple, de former le développement en série de facultés, de la fonction $F(z) = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right)$. Considérons sa dérivée

$$F'(z) = -\frac{1}{z(z+1)}.$$

C'est une série de facultés, dont tous les a_s sont nuls, sauf $a_1 = -1$, et son abscisse de convergence est $\lambda = -\infty$. Les coefficients b_s de la primitive sont donc ici

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = -\frac{1}{2},$$
$$b_s = \frac{(-1)^{s+1}}{s-1}\,\frac{B_s^{s-1}}{s!}, \qquad s = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

et la série de facultés ainsi obtenue

$$(85)\qquad \log\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z(z+1)} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} B_s^{s-1}}{s-1}\,\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

admet évidemment l'abscisse de convergence $\lambda = 0$, car la fonction $\log\left(1+\frac{1}{z}\right)$ a un point singulier logarithmique à l'origine. On obtient un développement un peu plus simple à l'aide de la transformation $(z,\ z+1)$, à savoir

$$\log\left(1+\frac{1}{z}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s B_s^{(s)}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+s)},$$

dont l'abscisse de convergence est encore $\lambda = 0$.

104. Différence finie et somme. — La série de facultés

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

et la série de Newton

$$F_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-s)}{s!}$$

se prêtent avec facilité aux opérations du calcul aux différences finies, et c'est surtout de cette propriété caractéristique que

résultent les nombreuses applications que l'on peut faire de ces développements. On a en effet

$$\Delta F(z) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_{s-1}\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)},$$

$$\Delta F_1(z) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s a_{s+1} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!},$$

et, en appliquant l'opération Δ n fois de suite, on trouve

$$\overset{n}{\Delta} F(z) = (-1)^n \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{a_{s-n}\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)},$$

$$\overset{n}{\Delta} F_1(z) = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s a_{s+n} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!}.$$

Considérons de même l'opération inverse. On vérifie immédiatement que les équations

$$\Delta\Phi(z) = F(z),$$
$$\Delta\Phi_1(z) = F_1(z)$$

admettent les solutions

$$\Phi(z) = C + a_0 \Psi(z) - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}, \tag{86}$$

$$\Phi_1(z) = C - \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s a_{s-1} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!}.$$

Ces deux équations aux différences finies admettent d'ailleurs une infinité de solutions qui diffèrent l'une de l'autre par une fonction périodique de période 1. Mais des propriétés de nos séries, il résulte que les deux solutions que nous venons d'indiquer sont les solutions principales, et qu'aucune autre solution n'admet un développement de la même forme.

Toutes ces séries ont évidemment la même abscisse de convergence.

Considérons, par exemple, l'équation

$$\Delta\Phi(z) = \frac{1}{z-\alpha} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1)}{z(z+1)\dots(z+s)}.$$

On sait que $\lambda = \mathcal{R}(\alpha)$, et la fonction $\Phi(z)$ est ici $\Psi(z-\alpha)$. La formule (86) nous fournit donc le développement en série de facultés de la différence

$$\Psi(z-\alpha) - \Psi(z) = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s)}{z(z+1)\dots(z+s)}.$$

dont l'abscisse de convergence est encore $\lambda = \mathcal{R}(\alpha)$.

On peut obtenir une représentation de la fonction $\Psi(z)$ elle-même, en appliquant la sommation à la série (85), dont le premier terme $\frac{1}{z}$ fournit justement $\Psi(z)$. Il vient ainsi

$$\Psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s B_{s+1}^{(s)}}{s(s+1)} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+s)},$$

et l'abscisse de convergence de cette série de facultés est $\lambda = 0$. On peut d'ailleurs simplifier un peu à l'aide de la transformation $(z, z+1)$, qui donne le développement

$$\Psi(z) = \log z - \frac{1}{z} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s B_s^{(s)}}{s} \frac{1}{(z+1)(z+2)\dots(z+s)},$$

dont l'abscisse de convergence est encore $\lambda = 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

Abel (N.-H.). — [1] Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

(*J. reine angew. Math.*, t. I, 1826, p. 311-339; *Œuvres*, I, Christiania, 1881, p. 219-250).

Ampère (A.-M.). — [1] Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérées comme dérivant d'une source commune [*Ann. Math. pures appl.* (*Gergonne*), t. XVI, 1825, p. 329-349].

Andoyer (H.). — [1] Calcul des différences et interpolation (*Encyclop. sc. math.*, t. I, vol. 4, fasc. 1, p. 47-195).

Belardinelli (G.). — [1] Sulla integrazione di una serie di funzioni razionali (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. XXXI, 1922, p. 429-431).

— [2] Sulle serie di funzioni (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. XXXII, 1923, p. 251-255).

— [3] Su alcune serie di funzioni razionali (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. XLVII, 1923, p. 193-208).

— [4] La rappresentazione delle funzioni analitiche mediante la formula d'interpolazione di Newton (*Circ. mat. Catana*, t. II, 1924, p. 53-72).

— [5] Sulle curve di convergenza delle serie di polinomi (*Rend. R. Istituto Lombardo*, t. LVIII, 1925).

Bendixson (I.). — [1] Sur la formule d'interpolation de Lagrange (*C. R. Acad. sc.*, t. CI, 1885, p. 1050-1053, p. 1129-1131).

— [2] Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss (*Acta math.*, t. IX, 1887, p. 1-34).

Bockwinkel (H. B. A.). — [1] Ueber die Entwicklung einer Funktion in eine Binomialkoeffizientenreihe (*Nieuw Archief Wiskunde*, 2e série, t. XIII, 1921, p. 189-208).

Bohr (H.). — [1] Ueber die Summabilität Dirichletscher Reihen (*Nachr. Ges. Gött.*, 1909, p. 247-262).

— [2] De Dirichletske Rœkkers Summabilitetsteori (Copenhague, 1919, p. 24-25).

Borel (E.). — [1] Sur l'interpolation (*C. R. Acad. sc.*, t. CXXIV, 1897, p. 673-676).

— [2] Mémoire sur les séries divergentes (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XVI, 1899, p. 9-136).
— [3] Leçons sur les séries divergentes (Paris, 1901).
— [4] Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes (Paris, 1905, p. 74-82).
— [5] Méthodes et problèmes de théorie des fonctions (Paris, 1922, p. 129-132).
Carlson (F.). — [1] Sur les séries de coefficients binomiaux (*Nova Acta soc. sc. Upsal.*, 4e série, t. IV, 1915, no 3).
— [2] Ueber ganzwertige Funktionen (*Math. Ztschr.*, t. XI, 1921, p. 1-23).
Carmichael (R. D.). — [1] On a general class of series of the form $\Sigma c_n g(x+n)$ (*Trans. Amer. math. soc.*, t. XVII, 1916, p. 207-232).
— [2] Examples of a remarkable class of series (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. XXIII, 1917, p. 407-425).
— [3] On the asymptotic character of functions defined by series of the form $\Sigma c_n g(x+n)$ (*Amer. J. Math.*, t. XXXIX, 1917, p. 385-403).
— [4] On the representation of functions in series of the form $\Sigma c_n g(x+n)$ (*Ibid.*, t. XL, 1918, p. 113-126).
Cauchy (A.-L.). — [1] Mémoire sur l'interpolation (*J. Math. pures appl.*, 1re série, t. II, 1837, p. 193-205).
— [2] Sur les fonctions interpolaires (*C. R. Acad. sc.*, t. XI, 1840, p. 775-789; *Œuvres* 1re série, t. V, Paris, 1885, p. 409-424).
Faber (G.). — [1] Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen (*Math. Ann.*, t. LVII, 1903, p. 379-381).
— [2] Beitrag zur Theorie der ganzen Funktionen (*Ibid.*, t. LXX, 1911, p. 48-68).
Fejér (L.). — [1] Interpolation und konforme Abbildung (*Nachr. Ges. Gött.*, 1918, p. 319-331).
Ferrar (W.-L.), — [1] On the relation between inverse factorial series and binomial coefficient series (*Proc. Edinburg math. Soc.*, t LXIII, 1925, p. 92-102).
Fréchet (M.). — [1] Sur une généralisation de la formule des accroissements finis et quelques applications (Rennes, 1910).
Frobenius (G.). — [1] Ueber die Entwicklung analytischer Funktionen in Reihen, die nach gegebenen Funktionen fortschreiten (*J. reine angew. Math.*, t. LXXIII, 1871, p. 1-30).
Fujiwara (M.). — [1] Ueber die Gültigkeitbedingungen der Interpolationsformeln von Gauss (*Tôhoku math. J.*, t. XX, 1921, p. 18-21).
Gauss (C. F.). — [1] Theoria interpolationis methodo nova tractata (*Œuvres*, t. III, 1876, p. 265-330).
Genocchi (A.). — [1] Sur la formule sommatoire de Maclaurin et les fonctions interpolaires (*C. R. Acad. sc.*, t. LXXXVI, 1878, p. 466-469).
— [2] Intorno alle funzioni interpolari (*Atti. Accad. sc. Torino*, t. XIII, 1878, p. 716-730).
— [3] Sopra una proprietá delle funzione interpolari (*Ibid.*, t. XVI, 1881, p. 269-275).

HERMITE (Ch.). — [1] Sur l'interpolation (*C. R. Acad. sc.*, t. XLVIII, 1859, p. 62-67; *Œuvres*, t. II, Paris, 1908, p. 87-92).

— [2] Sur la formule d'interpolation de Lagrange (*J. reine angew. Math.*, t. LXXXIV, 1878, p. 70-79; *Œuvres*, t. III, Paris, 1912, p. 432-443).

HORN (J.). — [1] Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, t. LXXI, 1912, p. 510-532).

— [2] Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen (*Jahresber. deutsch. Math.-Ver.*, t. XXIV, 1915, p. 309-329; t. XXV, 1916, p. 74-83).

— [3] Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen (*Math. Zeitschr.*, t. VIII, 1920, p. 100-114).

— [4] Laplacesche Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen (*Ibid.*, t. XXI, 1924, p. 85-95).

JENSEN (J.-L.-W.-V.). — [1] Problème 451 (*Tidsskrift for Math.*, 4e série, t. V, 1881, p. 130).

— [2] Om Rækkers Konvergens (*Ibid.*, 5e série, t. II, 1884, p. 69-72).

— [3] An elementary exposition of the theory of the gamma function (*Nyt Tidsskrift Math.*, t. II B, 1891; *Annals of Math.*, 2e série, t. XVII, 1916, p. 156-165).

— [4] Sur une expression simple du reste dans la formule d'interpolation de Newton (*Bull. Acad. Copenhague*, 1894, p. 246-252).

LAGRANGE (J.-L.). — [1] Sur les interpolations (*Œuvres*, t. VII, Paris, 1877, p. 535-553).

— [2] Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation (*Nouv. Mém. Acad. sc. Berlin*, t. XIV, 1783, p. 279-289; *Œuvres*, t. V, Paris, 1870, p. 517-532).

— [3] Leçons élémentaires sur les mathématiques (*J. Éc. Polyt.*, t. II, 1812, p. 173-278; *Œuvres*, t. VII, Paris, 1877, p. 284-287).

LANDAU (E.). — [1] Ueber die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen (*Stzgsber. Akad. München*, t. XXXVI, 1906, p. 151-218).

— [2] Note on Mr. Hardy's extension of a theorem of Mr. Pólya (*Proc. Cambr. philos. Soc.*, t. XX, 1920, p. 14-15).

MITTAG-LEFFLER (G.). — [1] Sur la série de Dirichlet et la série de facultés (*Acta math.*, t. XLVI, 1925, p. 337-340).

NEVANLINNA (F.). — [1] Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen (*Thèse*, Helsingfors, 1918).

— [2] Ueber korrespondierende Dirichletsche und Fakultätenreihen (*Ann. Acad. sc. Fennicae*, A, t. XVIII, 1921, nº 3).

— [3] Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen (*Ann. Acad. sc. Fennicae*, ser. A, t. XVI, 1921, nº 8).

NEWTON (I.). — [1] Philosophiæ naturalis principia mathematica (London, 1687).

— [2] Methodus differentialis (London, 1711).

— [3] Newtons interpolation formulas (*J. Inst. Actuaries*, t. LI, 1919, p. 77-106, p. 211-232).

Nielsen (N.). — [1] Recherches sur les séries de factorielles (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XIX, 1902, p. 409-453; t. XXI, 1904, p. 449-458).

— [2] Handbuch der Theorie der Gammafunktion (Leipzig, 1906).

Nörlund (N. E.). — [1] Sur les séries de facultés (*C. R. Acad. sc.*, t. CLVIII, 1914, p. 1252-1253, p. 1325-1327; *Acta math.*, t. XXXVII, 1914, p. 327-387).

— [2] Nogle Bemaerkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter [*Danske Vidsk. Selsk. math. phys. Meddelelser* (Copenhague), t. IV, 1921, p. 1-34].

— [3] Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton (*C. R. Acad. sc.*, t. CLXXIV, 1922, p. 919-921, p. 1108-1110; *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXXIX, 1922, p. 343-403; *Ibid.*, t. XL, 1923, p. 35-54).

— [4] Sur l'interpolation (*Bull. Soc. math. France*, t. LII, 1924, p. 114-132).

— [5] Stirlings Interpolationsformel (*Mém. Acad. sc. Copenhague*, 8e série, t. VII, 1924, p. 213-280).

Ogura (K.). — [1] Sur la théorie de l'interpolation (*C. R. Congr. intern. math. Strasbourg*, 1920, p. 316-322).

— [2] Sur la théorie de l'interpolation de Stirling et les zéros des fonctions entières (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. XLV, 1921, p. 31-40).

Okada (J.). — [1] On the representations of functions by the formulas of interpolation (*Tôhoku math. J.*, t. XX, 1921, p. 64-99).

— [2] On the convergency of interpolating functions (*Ibid.*, t. XXIII, 1923, p. 36-52).

Peano (G.). — [1] Sulle funzioni interpolari (*Atti Accad. sc. Torino*, t. XVIII, 1883, p. 573-580).

— [2] Resto nelle formule di interpolazione (*Scritti matematici offerti ad. E. d'Ovidio*, Torino, 1918, p. 333-335).

— [3] Interpolazione nelle tavole numeriche (*Atti Accad. sc. Torino*, t. LIII, 1918, p. 1-24).

Pincherle (S.). — [1] Sopra un problema d'interpolazione (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. XIV, 1900, p. 142-144).

— [2] Sulle serie di fattoriale (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. XI, 1902, p. 137-144, p. 417-426).

— [3] Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriale (*Ibid.*, t. XII, 1903, p. 336-343).

— [4] Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche (*Rend. Accad. Bologna*, 2e série, t. VIII, 1904, p. 5-13).

— [5] Sur les fonctions déterminantes (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXII, 1905, p. 9-68).

— [6] Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti (*Atti* IV. *Congr. intern. mat. Roma* 1908, t. II, p. 44-48).

— [7] Sulle serie di fattoriali generalizzate (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. XXXVII, 1914, p. 379-390).

Pólya (G.). — [1] Ueber ganzwertige ganze Funktionen (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. XL, 1915, p. 1-16).

— [2] Ueber ganze ganzwertige Funktionen (*Nachr. Ges. Gött.*, 1920, p. 1-10).

— [3] On certain sequences of polynomials (*Proc. London math. soc.*, April 1925).

Pólya (G.) und Szegö (G.). — [1] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (t. I-II, Berlin 1925).

Runge (C.). — [1] Ueber empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten (*Ztschr. Math. Phys.*, t. XLVI, 1901, p. 224-243).

Schlömilch (O.). — [1] Ueber Fakultätenreihen (*Ber. Ges. Lpzg.*, t. XI, 1859, p. 109-137).

— [2] Ueber die Entwicklung von Funktionen komplexer Variablen in Fakultätenreihen (*Ibid.*, t. XV, 1863, p. 58-62).

Schwarz (H. A.). — [1] Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires (*Atti Accad. sc. Torino*, t. XVII, 1882, p. 740-742; *Ges. math. Abh.*, t. II, Berlin, 1890, p. 307-308).

Steffensen (J. F.). — [1] Interpolation-formulas with one and more variables (*Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1923, p. 18-43).

— [2] On the error in interpolation-formulas (*Ibid.*, p. 185-189).

— [3] On Laplace's and Gauss' summation-formulas (*Ibid.*, 1924, p. 1-15).

Stieltjes (T. J.). — [1] Over Lagranges interpolatieformule (*Verslagen Akad. Wet. Amsterdam*, 2e série, t. XVII, 1882, p. 239-254; *Œuvres*, t. I, Groningen, 1914, p. 33-60).

— [2] Eenige opmerkingen omtrent de differentiaalquotiënten van eene functie van één veranderlijke (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1re série, t. IX, 1882, p. 106-111; *Œuvres*, t. I, p. 61-72).

Stirling (J.). — [1] Methodus differentialis Newtoniana illustrata (*Philos. Trans. London*, t. XXX, 1720, p. 1050-1070).

— [2] Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum (London, 1730).

Szasz (P.). — [1] Ueber einen Mittelwertsatz (*Math. Ztschr.*, t. XXV, 1926, p. 116-120).

Thiele (T. N.). — [1] Interpolationsrechnung (Leipzig, 1909).

Uhler (A.). — [1] Sur la formule d'interpolation de Stirling (*Arkiv Math. Astr. och Phys.* (Stockholm), t. XVIII, n° 32, 1924).

Valiron (G.), — [1] Sur la formule d'interpolation de Lagrange (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. XLIX, 1925, p. 181-191, p. 203-224).

Watson (G. N.). — [1] A theory of asymptotic series (*Phil. Trans. Royal Soc. London*, ser. A, t. CCXI, 1911, p. 279-313).

— [2] The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. XXXIV, 1912, p. 41-88).

Whittaker (E. T.). — [1] On the functions which are represented by expansions of the interpolation-theory (*Proc. R. soc. Edinb.*, t. XXXV, 1915, p. 181-194).

— [2] (and G. Robinson) A short course in interpolation (London, 1924).

Wigert (S.). — [1] Sur les fonctions entières [*Öfversigt Vetenskapsakademiens förh.* (Stockholm), t. LVII, 1900, p. 1001-1011].

— [2] Sur une transformation de la série

$$\Sigma\, a_n \frac{s(s-1)\,(s-n+1)}{n!}$$

[*Arkiv Mat. Astr. och Fysik* (Stockholm), t. VII, n° 26, 1911, p. 10].

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE	V
CHAPITRE I. — *La formule d'interpolation de Newton*	1
Les différences divisées	1
Expressions diverses du reste de la formule de Newton	5
CHAPITRE II. — *La série d'interpolation de Stirling*	15
Convergence uniforme	15
Fonction majorante	17
Fonctions entières développables en série de Stirling	33
CHAPITRE III. — *L'ordre de la série de Taylor sur son cercle de convergence*	45
Les recherches de J Hadamard	45
CHAPITRE IV. — *L'intégrale de Laplace et la série de Stirling*	60
Deux transformations de séries	60
Représentations diverses de la série de Stirling par l'intégrale de Laplace	63
La série de Bessel	70
Exemples	71
Valeurs asymptotiques	77
Nouvelle détermination d'une expression majorante pour F (z)	81
CHAPITRE V. — *La série d'interpolation de Newton*	99
Le domaine de convergence	99
Développements de zéro. Séries réduites	103
Convergence absolue	108
L'abscisse de convergence	111
Transformations linéaires	116
Fonction majorante	119
Fonctions développables en série de Newton	131
Prolongement analytique	141
L'intégrale de Laplace et la série de Newton	148

Pages.

CHAPITRE VI. — *La série de facultés* 170

Introduction 170
Le domaine de convergence 171
Comparaison avec la série de Newton associée. Théorème de Landau. 177
L'intégrale de Laplace et la série de facultés 184
Prolongement analytique 191
Problème de convergence 206
Application des opérations fondamentales de l'Analyse 215

BIBLIOGRAPHIE 228

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS et Cie
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques postaux Paris : 29323.) R. C. Seine 22520.

Collection de Monographies

SUR LA

Théorie des Fonctions

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

de M. **Émile BOREL**

Membre de l'Institut.

VOLUMES IN-8 (25×16) SE VENDANT SÉPARÉMENT.

Majoration 40 %

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions*), par EMILE BOREL, 3e édit., 1914 ..... 15 fr.

Leçons sur les fonctions entières, 2e édition; 1921 ..... 20 fr.

Leçons sur les séries divergentes, par EMILE BOREL, 2e édit. (*Sous presse.*)

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, recueillies et rédigées par *Robert d'Adhémar;* 1902.... 7 fr.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par EMILE BOREL, recueillies et rédigées par *Ludovic Zoretti ;* 1903..... 7 fr.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE; 1904.... (*Sous presse*)

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'Ecole Normale supérieure par EMILE BOREL et rédigées par *Maurice Fréchet*, avec des Notes par PAUL PAINLEVÉ et HENRI LEBESGUE ; 1905..... 9 fr.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France. par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy ;* 1905 ..... 7 fr.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNEST LINDELÖF; 1905 ..... 7 fr.

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE ; 1906 ..... 7 fr.

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre, professées au Collège de France par PIERRE BOUTROUX; avec une *Note* de PAUL PAINLEVÉ; 1908 ..... 13 fr.

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par OTTO BLUMENTHAL; 1910..... 11 fr.

Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la Fte des Sciences de Paris, par É. BOREL, recueillies et rédigées par *A. Denjoy ;* 1910.. 11 fr.

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par PAUL MONTEL; 1910..... 7 fr.

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par LUDOVIC ZORETTI; 1911 ..... 7 fr. 50

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910 par VITO VOLTERRA, publiées par *M. Tomassetti* et *F.-S. Zarlatti*; 1913 ..... 11 fr.

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, professées à l'Université de Budapest, par PAUL DIENES; 1913 ..... 11 fr.

Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1911, par VITO VOLTERRA, recueillies et rédigées par *J. Perès*; 1913.... 15 fr.

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, par FRÉDÉRIC RIESZ; 1913 ..... 13 fr.

Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN; 1916..... 14 fr.

Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, professées à la Sorbonne en 1913-1914, par MAXIME BÔCHER, recueillies et rédigées par *Gaston Julia*; 1917..... 10 fr.

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par EMILE BOREL, rédigées par *G. Julia*; 1917..... 15 fr.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle; professées à la Sorbonne; par C. DE LA VALLÉE POUSSIN; 1919..... 16 fr.

Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de n variables. Fonctions de Poincaré; par GEORGES GIRAUD; 1920.. 13 fr.

Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions; par Emile BOREL 1922..... 12 fr.

Leçons d'analyse fonctionnelle, professées au Collège de France, par PAUL LÉVY, Professeur à l'Ecole Polytechnique, avec une Préface de J. HADAMARD, Membre de l'Institut; 1923..... 35 fr.

Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, professées au Collège de France, par GASTON JULIA, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris; rédigées par P. FLAMANT, Agrégé-Préparateur à l'Ecole Normale supérieure; 1924..... 15 fr.

L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique, par S. LEFSCHETZ, 154 pages, avec figures; 1924..... 20 fr.

Leçons sur la composition et les fonctions permutables, par VITO VOLTERRA, Membre de l'Institut, professeur à l'Université de Rome et J. PÉRÈS, professeur à l'Université d'Aix-Marseille; 1924..... 20 fr.

Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, professées à la Sorbonne par SERGE BERNSTEIN, Membre de l'Académie des Sciences de l'Ukraine. In-8 (25×16) de X-200 pages; 1926 ..... 50 fr.

Leçons sur les Fonctions quasi analytiques, professées au Collège de France, par C. CARLEMAN, professeur à l'Université de Stockholm. In-8 (25-16) de 116 p.; 1926..... 30 fr.

Traité du Calcul des Probabilités

et de ses applications

COLLECTION D'OUVRAGES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS

PUBLIÉE PAR

Émile BOREL

Professeur de Calcul des Probabilités et Physique mathématique
à la Faculté des Sciences de Paris, Membre de l'Institut.

Avec la collaboration de L. BLARINGHEM, C.-V.-L. CHARLIER, R. DELTHEIL, H. GALBRUN, J. HAAG, R. LAGRANGE, F. PERRIN, P. TRAYNARD, DUBREIL.

Majoration 40 %

TOME I. — Les principes de la Théorie des probabilités.

1. Principes et formules classiques, par E. BOREL, rédigé par R. LAGRANGE. 18 fr.
2. Erreurs et moindres carrés, par Robert DELTHEIL.
3. Recherches théoriques modernes, par Emile BOREL.
4. Les principes de la statistique mathématique, par C.-E. TRAYNARD.

TOME II. — Les applications de la Théorie des probabilités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques.

1. Applications á l'arithmétique et à la théorie des fonctions, par Emile BOREL, rédigé par DUBREIL ; 1926..... 17 fr.
2. Probabilités géométriques, par Robert DELTHEIL ; 1926..... 22 fr.
3. Mécanique statistique classique, par Emile BOREL, rédigé par Francis PERRIN ; 1925 ..... 18 fr.
4. Applications à l'astronomie, par C.-V.-L. CHARLIER.
5. Applications aux théories physiques actuelles, par Emile BOREL et Francis PERRIN.

TOME III. — Les applications de la Théorie des probabilités aux sciences économiques et aux sciences biologiques.

1. Assurances sur la vie. Calcul des primes, par Henri GALBRUN ; 1924. 35 fr.
2. Assurances sur la vie. Calcul des réserves, par Henri GALBRUN.
3. Applications à la biologie. Variations discontinues et Mendélisme, par L. BLARINGHEM.
4. Applications à la biologie. Variations continues et Biométrique, par L. BLARINGHEM et C.-E. TRAYNARD.

TOME IV. — Applications diverses et conclusion.

1. Applications au tir, par J. HAAG.
2. Applications aux jeux de hasard, par Emile BOREL.
3. Compléments divers.
4. Conclusion : la portée philosophique de la théorie des probabilités, par Emile BOREL.

Mémorial
des Sciences Mathématiques

DIRECTEUR : Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences
Professeur à l'Université de Strasbourg
Directeur du " Journal de Mathématiques pures et appliquées "

Nouvelle collection fondée sous le haut patronage de :

L'Académie des Sciences de Paris,
L'Académie Royale de Serbie (Belgrade),
L'Académie Royale des Sciences de Belgique (Bruxelles),
L'Académie des Sciences de Bucarest,
L'Académie des Sciences de Coïmbra,
L'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres (Cracovie),
L'Académie des Sciences de l'Ukraine (Kiew),
La Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales (Madrid),
L'Académie Tchèque des Sciences (Prague),
La Reale Accademia dei Lincei (Rome),
L'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de Suède (Stockholm, fondation Mittag-Leffler),
La Société Mathématique de France, etc.,

avec la collaboration de nombreux savants.

Volumes in-8 raisin (25×16) se vendant séparément :

Majoration 40 °/₀ — **Fascicules parus :**

Fasc.

1. *Paul Appell.* — Sur une forme générale des équations de la dynamique. In-8° raisin (25-16) de 50 p.; 1925 ..... 12 fr.
2. *G. Valiron.* — Fonctions entières et fonctions méromorphes. In-8 raisin (25-16) de 59 p.; 1925..... 12 fr.
3. *Paul Appell.* — Séries hypergéométriques de plusieurs variables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques de l'hyperespace. In-8 raisin (25-16) de 75 p.; 1925..... 12 fr.
4. *M. d'Ocagne.* — Esquisse d'ensemble de la Nomographie. In-8 de 68 p.; 1925..... 12 fr.
5. *P. Lévy.* — Analyse fonctionnelle. In-8 de 56 p.; 1925..... 12 fr.
6. *E. Goursat.* — Le problème de Bäcklund. In-8 de 53 p.; 1925.. . 12 fr.
7. *A. Buhl.* — Séries analytiques. Sommabilité. 55 p.; 1925..... 12 fr.
8. *Th. de Donder.* — Introduction à la gravifique Einsteinienne. 53 p.; 1926..... 12 fr.
9. *E. Cartan.* — La Géométrie des espaces de Riemann. 56 p.; 1926 . 12 fr.
10. *P. Humbert.* — Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu. 58 p.; 1926. 12 fr.
11. *G. Bouligand.* — Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet. 52 p.; 1926..... 12 fr.
12. *R. Gosse.* — La méthode de Darboux pour les équations $s = f(x, y, z, p, q)$. 53 p.; 1926..... 12 fr.
13. *A. Véronnet.* — Figures d'équilibre et Cosmogonie. 58 p.; 1926... 12 fr.
14. *Th. de Donder.* — Théorie des champs gravifiques. 60 p.; 1926... 12 fr.
15. *S. Zaremba.* — La logique des Mathématiques; 1926..... 12 fr.
16. *A. Buhl.* — Formules stokiennes; 1926..... 12 fr.
17. *G. Valiron.* — Théorie générale des séries de Dirichlet, 56 p.; 1926. 12 fr.
18. *A. Sainte-Laguë.* — Réseaux (ou Graphes)..... 12 fr.

77535-26. — Paris, Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, Quai des Grands-Augustins.

QA
281
N6

FEB 5 1974

RAYMOND H. FOGLER LIBRARY
DATE DUE

G.E.STECHERT&Co
(ALFRED HAFNER)

QA281.N6 ORO
Lecons sur les series d'interpolation
3 7550 00146811 6